[§5.13] Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις – Σημεία καμπής

Κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα <u>κυρτό σύνολο</u>, δηλ. $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$:

$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in I \ \forall \lambda \in (0,1)$. Επίσης $\forall x \in (x_1, x_2)\ \exists \lambda := \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in (0,1)$:

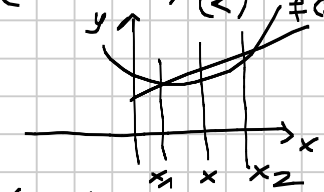
$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \left(= \frac{(x_2 - x) x_1 + (x - x_1) x_2}{x_2 - x_1} \right)$$

$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, $\lambda \in (0,1)$

Ορισμός [5.114] Η $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, λέγεται

α) (γνήσια) κυρτή $:\Longleftrightarrow \forall \lambda \in [0,1]\ \forall x_1, x_2 \in I: f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \underset{(<)}{\leq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

β) (γνήσια) κοίλη $:\Longleftrightarrow$ η $-f$ είναι (γνήσια) κυρτή



$y(x) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

Παράδειγμα [5.115] : $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, κυρτή, αφού $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)^2 = \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda) x_1 x_2$$

$$\underset{(*)}{\leq} \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + \lambda(1-\lambda)(x_1^2 + x_2^2) = \lambda x_1^2 + (1-\lambda) x_2^2$$

$[(*): (x_1 - x_2)^2 \geq 0]$

Θ. [5.119] : $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα, παραγωγίσιμη. Τότε:

$$f \text{ κυρτή} \iff f' \text{ αύξουσα}$$

(χωρίς απόδειξη, βλ. [Ντ.])

Παρατήρηση: Μια κυρτή συνάρτηση δεν είναι αναγκαία παραγωγίσιμη, πβ. π.χ. $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$: $|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2| \leq \lambda|x_1| + (1-\lambda)|x_2|$

Θ. [5.121] : $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα, παραγωγίσιμη. Τότε:

$$f \text{ κυρτή} \iff f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall\, x, x_0 \in I$$

[$\iff$ το γράφημα της f βρίσκεται "πάνω" από οποιαδήποτε εφαπτομένη του]

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θ. [5.119] πρέπει να δείξουμε:

$$f' \text{ αύξουσα} \iff f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in I$$

$\Rightarrow$: $x = x_0$: προφανές

$x \neq x_0$: $f(x) - f(x_0) \underset{\text{ΘΜΤ}}{=} f'(\xi)(x - x_0) \underset{f' \text{ αύξ.}}{=}$

$$= \begin{cases} -f'(\xi)(x_0 - x) \geq -f'(x_0)(x_0 - x) = f'(x_0)(x - x_0) & \text{για } \xi \in (x, x_0) \\ f'(\xi)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) & \text{για } \xi \in (x_0, x) \end{cases}$$

$\Leftarrow$: Έστω $x < x_0$. Αφού $\begin{cases} f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \\ f(x_0) - f(x) \geq f'(x)(x_0 - x) \end{cases}$, έχουμε

$$f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq f'(x).$$

$\square$

Θ. [5.120]: $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα, δύο φορές παραγωγίσιμη. Τότε:

$$f \text{ κυρτή} \iff f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$$

Απόδειξη: f κυρτή $\iff$ f' αύξουσα $\iff$ $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$ (Θ. [5.119], [5.61]) $\square$

Ορισμός [5.124]: $f:(x_0-\delta, x_0+\delta)\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $\delta>0$, δύο φορές παραγωγίσιμη.

$(x_0, f(x_0))$ <u>σημείο καμπής της f</u> $:\Longleftrightarrow f''(x_0)=0$ και $f''(x_0-h)f''(x_0+h)<0\ \forall h\in(0,\delta)$

[Τα σημεία καμπής μιας καμπύλης είναι τα σημεία, όπου η εφαπτομένη τέμνει την καμπύλη.]

Θ. [5.126]: $f:(x_0-\delta, x_0+\delta)\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $\delta>0$, $\exists f^{(\nu)}$ συνεχής, $\nu\geq 3$ περιττός,

$f''(x_0)=\ldots=f^{(\nu-1)}(x_0)=0$ και $f^{(\nu)}(x_0)\neq 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής της f

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε στην $g:=f''$ την ακόλουθη παραλλαγή του Θ. [5.107](iii) $\square$

Πρόταση: $f:(x_0-\delta, x_0+\delta)\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $\delta>0$, $\exists f^{(\nu)}$ συνεχής, $\nu\geq 1$ περιττός,

$f(x_0)=\ldots=f^{(\nu-1)}(x_0)=0$ και $f^{(\nu)}(x_0)\neq 0 \Rightarrow$ η f αλλάζει πρόσημο στο x_0

Απόδειξη: Από την συνέχεια της $f^{(\nu)}$, το $f^{(\nu)}(x_0)\neq 0$, και το Θ. Taylor έχουμε:

$\exists \delta_1>0\ \forall x\in N^*_{\delta_1}(x_0): f(x)=f_1(x)f_2(x)$, $f_1(x):=\dfrac{f^{(\nu)}(\xi(x))f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}>0$, $f_2(x):=\dfrac{(x-x_0)^\nu}{f^{(\nu)}(x_0)}$

ν περιττός $\Rightarrow$ η f_2 και άρα και η f αλλάζουν πρόσημο στο x_0, δηλ. $f(x_0-h)f(x_0+h)<0\ \forall h\in(0,\delta_1)$

$\square$

Εφαρμογή [2.,§5.13] 12.2/5

α) $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $f(\alpha)=f(\beta)=0$, $\exists\, f''(x)>0\ \forall x\in(\alpha,\beta) \Rightarrow f(x)<0\ \forall x\in(\alpha,\beta)$

Λ.: $f''(x)>0\ \forall x\in(\alpha,\beta) \Rightarrow f'$ γν. αύξ.

ΘΜΤ: $\forall x\in(\alpha,\beta):\exists\, \xi\in(\alpha,x):\ f(x)=f(x)-f(\alpha)=\underbrace{f'(\xi)}_{<f'(x)}\underbrace{(x-\alpha)}_{>0}<f'(x)(x-\alpha)$ (1)

$\exists\, \eta\in(x,\beta):\ f(x)=f(x)-f(\beta)=\underbrace{f'(\eta)}_{>f'(x)}\underbrace{(x-\beta)}_{<0}<f'(x)(x-\beta)$ (2)

Άρα: Αν $f'(x)=0 \underset{(1),(2)}{\Rightarrow} f(x)<0$

αν $f'(x)<0 \underset{(1)}{\Rightarrow} f(x)<f'(x)(x-\alpha)<0$

αν $f'(x)>0 \underset{(2)}{\Rightarrow} f(x)<f'(x)(x-\beta)<0$ □

[Εναλλακτικά [Ντ.]: $f''(x)>0\ \forall x\in(\alpha,\beta) \Rightarrow f'$ γν. αύξ. στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)=0 \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists\, c\in(\alpha,\beta): f'(c)=0$. Άρα $f'(x)<0\ \forall x\in(\alpha,c)$, $f'(x)>0\ \forall x\in(c,\beta) \Rightarrow f(x)<f(\alpha)=0\ \forall x\in(\alpha,c]$, $f(x)<f(\beta)=0\ \forall x\in[c,\beta)$]

β) $\alpha^x \beta^{1-x} \leq \alpha x + (1-x)\beta \quad \forall \alpha,\beta>0 \quad \forall x\in[0,1]$

Λ.: $\alpha^x \beta^{1-x} = e^{x\ln\alpha} e^{(1-x)\ln\beta} = e^{x\ln\alpha + (1-x)\ln\beta} \overset{\text{ν.δ.ο.}}{\leq} e^{\ln(\alpha x + (1-x)\beta)}$

Αφού η $e^x, x\in\mathbb{R}$, είναι γν. αύξ., αρκεί να δείξουμε

$x\ln\alpha + (1-x)\ln\beta \leq \ln(\alpha x + (1-x)\beta) \quad \forall \alpha,\beta>0 \ \forall x\in[0,1]$,

δηλ. ότι η $f(\alpha) = \ln\alpha$, $\alpha>0$, είναι κοίλη, το οποίο ισχύει, αφού

$f(\alpha) = \ln\alpha \Rightarrow f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow f''(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2} < 0 \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ □

[Εναλλακτικά [Ντ.]: $f(x) = \alpha^x\beta^{1-x} - \alpha x - (1-x)\beta \overset{\text{ν.δ.ο.}}{\leq} 0 \ \forall x\in[0,1], \alpha,\beta>0$

$f(x) = e^{x\ln\alpha} e^{(1-x)\ln\beta} - \alpha x - (1-x)\beta \Rightarrow f(0) = 0 = f(1)$ και

$f'(x) = e^{x(\ln\alpha - \ln\beta) + \ln\beta}\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - \alpha + \beta \Rightarrow f''(x) = e^{x\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \ln\beta}\left(\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)^2 > 0$

$\forall x\in\mathbb{R} \underset{\alpha)}{\Rightarrow} f(x) < 0 \ \forall x\in(0,1)$]

Α. 5.106 α) (i) $f(\omega) = \omega \log \omega$, $\omega > 0$ είναι κυρτή

Λ.: $f'(\omega) = \log \omega + 1$, $f''(\omega) = \frac{1}{\omega} > 0 \ \forall \omega > 0$

(ii) $x, y > 0$, $x + y = 1$: $x^x y^y \geq \frac{1}{2}$

Λ.: $x^x y^y = e^{x \ln x} e^{y \ln y} = e^{x \ln x + y \ln y} = e^{f(x) + f(y)}$

$\overset{\text{ν.δ.ο.}}{\geq} \frac{1}{2} = e^{\ln \frac{1}{2}}$

Αφού η e^x, $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα, αρκεί να δείξουμε

$f(x) + f(y) \geq \ln \frac{1}{2} = 2 \, \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = 2 f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \forall x, y > 0, \ x + y = 1$,

το οποίο ισχύει αφού η $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και άρα από

τον ορισμό (με $\lambda = \frac{1}{2}$) έχουμε $f\left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$

β) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$: $|\alpha+\beta|^r \leq c_r(|\alpha|^r + |\beta|^r)$, $c_r = \begin{cases} 1, & r \leq 1 \\ 2^{r-1}, & r > 1 \end{cases}$

Λ.: Για $r=0$ έχουμε $|\alpha+\beta|^0 = 1 < 1\cdot(|\alpha|^0 + |\beta|^0) = 1\cdot(1+1) = 2$.

Αφού $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ και η $x^r = e^{r \log x}$, $x>0$, $r>0$ είναι γνησίως αύξουσα ως σύνθεση γνησίως αυξουσών

[$g : D \to \mathbb{R}$ γν. αύξ, $f : \Delta \to f(\Delta) \subseteq D$ γν. αύξ.

$\Rightarrow$ $g \circ f : \Delta \to \mathbb{R}$ γν. αύξ., αφού $\forall x_1, x_2 \in \Delta : x_1 < x_2$

$\Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$ $\Rightarrow$ $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$] έχουμε

$|\alpha+\beta|^r \leq (|\alpha| + |\beta|)^r$ και άρα αρκεί να δείξουμε

$$(\alpha+\beta)^r \leq c_r(\alpha^r + \beta^r) \quad \forall \alpha, \beta \geq 0, \; r>0 \quad (1)$$

Επειδή αν $\alpha\beta = 0$ η (1) είναι προφανής, αφού $0^r = 0$ για $r>0$

[Το $0^r := 0$ ορίζεται μέσω της συνεχούς επέκτασης της x^r, $x>0$, $r>0$, αφού $\lim_{x\to 0} x^r = \lim_{x\to 0} e^{r\log x} = \lim_{x\to 0+} e^{r\log x} = 0$, βλ. Σημ. ...] και $c_r \geq 1$ $\forall r>0$ [$2^x = e^{x\ln 2}$, $x\in\mathbb{R}$ γν. αύξουσα], αρκεί να δείξουμε $(\alpha+\beta)^r \leq c_r(\alpha^r+\beta^r)$ $\forall \alpha,\beta>0$, $r>0$ η οποία με την σειρά της είναι προφανής για $r=1$.

Για $r>1$ η $f(x)=x^r$, $x>0$ είναι γνήσια κυρτή, αφού

$$f'(x) = r x^{r-1}, \quad f''(x) = r(r-1)x^{r-2} > 0$$

Συνεπώς $f\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) \leq \frac{1}{2}f(\alpha) + \frac{1}{2}f(\beta)$ $\forall \alpha,\beta>0$,

δηλ. $\frac{1}{2^r}(\alpha+\beta)^r \leq \frac{1}{2}(\alpha^r+\beta^r)$, και άρα

$$(\alpha+\beta)^r \leq 2^{r-1}(\alpha^r+\beta^r) \quad \forall \alpha,\beta>0,\ r>1$$

12.2/10

Μένει να δείξουμε $(\alpha+\beta)^{\frac{1}{r}} \le \alpha^{\frac{1}{r}} + \beta^{\frac{1}{r}}$, $r>1$, $\alpha, \beta > 0$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha+\beta \le \left(\alpha^{\frac{1}{r}} + \beta^{\frac{1}{r}}\right)^r$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\alpha^{\frac{1}{r}}\right)^r + \left(\beta^{\frac{1}{r}}\right)^r \le \left(\alpha^{\frac{1}{r}} + \beta^{\frac{1}{r}}\right)^r$$

$$\Leftrightarrow \quad u^r + v^r \le (u+v)^r, \quad r>1, \quad u=\alpha^{1/r}, \ v=\beta^{1/r}>0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+x^r \le (1+x)^r, \quad r>1, \quad x>0$$

$$\Leftrightarrow \quad g(x) = 1+x^r-(1+x)^r < 0, \quad r>1, \quad x>0$$

το οποίο ισχύει αφού (για την συνεχή επέκταση της g στο 0) έχουμε

$g(0)=0$ και $g'(x) = r x^{r-1} - r(1+x)^{r-1} = r\left(x^{r-1}-(1+x)^{r-1}\right) < 0$,

αφού η $h(x) = x^\alpha$, $\alpha>0$ είναι γνησίως αύξουσα $[h'(x) = \alpha x^{\alpha-1} > 0, x>0]$

Άρα ΘΜΤ: $g(x) = g'(\xi)\, x$, $\xi \in (0,x) \Rightarrow g(x)<0$

$\gamma)\quad \alpha\in(0,1),\ x>0,\ x\neq 1:\ (x+1)^{\alpha-1} > \dfrac{x^{\alpha}-1}{x-1}\qquad (*)$ $\qquad$ 12.2/11

1.: Για $x\in(0,1) \iff y=\frac{1}{x}>1$ έχουμε

$$\left(\frac{1}{y}+1\right)^{\alpha-1} > \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}-1}{\frac{1}{y}-1} \iff (1+y)^{\alpha-1}\frac{1}{y^{\alpha-1}} > \frac{(1-y^{\alpha})\frac{1}{y^{\alpha}}}{(1-y)\frac{1}{y}} = \frac{y^{\alpha}-1}{y-1}\,\frac{1}{y^{\alpha-1}}$$

που ισχύει αν ισχύει η ανισότητα $(*)$ για $x>1$.

Για $x>1$ θέλουμε να δείξουμε $f(x)=(x+1)^{\alpha-1}(x-1)-x^{\alpha}+1>0$.

Έχουμε $f(1)=0$ και

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\alpha-1)(x+1)^{\alpha-2}(x-1)+(x+1)^{\alpha-1}-\alpha x^{\alpha-1} \\ &= \left[(\alpha-1)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+1\right](x+1)^{\alpha-1}-\alpha x^{\alpha-1} \\ &= \left(\left[(\alpha-1)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+1\right]\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\alpha-1}-\alpha\right)x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

12.2/12

$$= \left(\left[1 - p(2y-1)\right] y^p - (1-p) \right) x^{\alpha - 1}$$

όπου $p = 1-\alpha \in (0,1)$, $y = \dfrac{x}{x+1} \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ με

$$g(y) = (1 - p(2y-1)) y^p \Rightarrow g(1) = 1-p,$$

$$g'(y) = -2p\, y^p + (1 - p(2y-1))\, p\, y^{p-1} = (-2y+1)(1+p)\, p\, y^{p-1} < 0 \text{ για } y > \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g(y) > g(1) \;\; \forall y \in \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow f'(x) > 0 \;\forall x \in (1, \infty) \Rightarrow f(x) > 0 \;\forall x > 0$$