Διάφορες υπόλοιπες ασκήσεις

A.: Να βρεθεί η f' καθώς και τα $D(f)$, $D(f')$ της

$$f(x) = \log\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x+2}{5-x}\right)\right)$$

Λ.: Ως σύνθεση συνάρτησης $f = h \circ g \circ k$ με $k(x) = \dfrac{x+2}{5-x}$, $g(y) = \operatorname{Arcsin} y$, $h(z) = \log z$, η f ορίζεται στο

$$\begin{aligned}
D(f) &= \{ x \in D(g \circ k) : (g \circ k)(x) \in D(h) \} \\
&= \{ x \in D(k) : k(x) \in D(g),\ g(k(x)) \in D(h) \} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{5\} : \frac{x+2}{5-x} \in [-1, 1],\ \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x+2}{5-x}\right) > 0 \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{5\} : \frac{x+2}{5-x} \in (0, 1] \right\}
\end{aligned}$$

Αφού $\dfrac{x+2}{5-x} > 0 \underset{5\neq x}{\iff} (x+2)(5-x) > 0 \iff x \in (-2,5)$

και $\dfrac{x+2}{5-x} \leq 1 \underset{5-x>0}{\iff} x+2 \leq 5-x \iff 2x \leq 3 \iff x \leq \dfrac{3}{2}$,

έχουμε $D(f) = \{ x \in \mathbb{R}\setminus\{5\} : x \in (-2, \tfrac{3}{2}] \} = (-2, \tfrac{3}{2}]$

Αφού $h'(z) = \log' z = \dfrac{1}{z}$, $z>0$, $g'(y) = \text{Arcsin}' y = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $\forall y \in (-1,1)$,

$k'(x) = \left(\dfrac{x+2}{5-x}\right)' = \dfrac{5-x+(x+2)}{(5-x)^2} = \dfrac{7}{(5-x)^2}$,

έχουμε σύμφωνα με το θ. Παραγώγισης Σύνθεσης Συνάρτησης

$$f'(x) = (h\circ g\circ k)'(x) = h'((g\circ k)(x))\,(g\circ k)'(x) = h'(g(k(x)))\,g'(k(x))\,k'(x)$$

$$= \frac{1}{\text{Arcsin}\left(\frac{x+2}{5-x}\right)} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{5-x}\right)^2}} \frac{7}{(5-x)^2}$$

με $D(f') = D(f)\setminus\{\tfrac{3}{2}\} = \{ x \in \mathbb{R}\setminus\{5\} : \dfrac{x+2}{5-x} \in (0,1) \}$

13B/3

A. Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log x - \log y}{x-y}, & 0<x<y \\ \dfrac{1}{y}, & 0<x=y \end{cases}$

Λύση: Η $f : (0,y] \to \mathbb{R}$, $y>0$ είναι καλώς ορισμένη,

συνεχής με $\lim\limits_{x \to y} f(x) = \lim\limits_{x \to y-} f(x) = \lim\limits_{x\to y-} \dfrac{\log\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}-1\right) y} = \dfrac{1}{y} \lim\limits_{\frac{x}{y} \to 1-} \dfrac{\log\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{x}{y}-1} \underset{[§3.6,\, 6.]}{=} \dfrac{1}{y}$

παραγωγίσιμη στο $(0,y)$ με $f'(x) = \dfrac{1}{x(x-y)} - \dfrac{\log x - \log y}{(x-y)^2} = \dfrac{x-y - x\log\left(\frac{x}{y}\right)}{x(x-y)^2}$

$= \dfrac{\frac{x}{y} - 1 - \frac{x}{y}\log\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}-1\right)^2 y^2} = \dfrac{1}{y^2}\, g(z)$ με $g(z) = \dfrac{z-1-z\log z}{z(z-1)^2}$, $z \in (0,1)$

όπου $g(z) = \dfrac{z(1-\log z) - 1}{z\,(z-1)^2} = \dfrac{1}{(z-1)^2}\left(1 - \log z - \dfrac{1}{z}\right) = -\dfrac{1}{(z-1)^2}\left(\log z - 1 + \dfrac{1}{z}\right)$

< 0 για $z \in (0,1)$, αφού $\log z - 1 = \frac{1}{\xi}$, $\xi \in (0,z)$ (ΘΜΤ), και άρα

$f'(x) < 0$ για $x \in (0,y)$ $\Longrightarrow$ f γνήσια φθίνουσα στο $(0,y)$, και αφού

$f(x) - \frac{1}{y} = f'(\eta)(x-y) > 0$, $\eta \in (x,y)$ (ΘΜΤ), f γν. φθίνουσα στο $(0,y]$.

Α.: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\cos x-\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Ν.δ.ο.

α) η f είναι γνησίως αύξουσα

β) η εξίσωση $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$, δεν έχει θετική ρίζα αν $\alpha<1$ και έχει μοναδική θετική ρίζα αν $\alpha>1$.

Λ.: α) $f'(x)=1-\sin x>0 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi+\frac{\pi}{2},\, k\in\mathbb{Z}\}$

$\underset{(\Theta.[5.62])}{\Longrightarrow}$ f γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},\, 2(k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ (1)

Αφού $f(x)-f(2k\pi+\frac{\pi}{2})=f'(\xi)(x-2k\pi-\frac{\pi}{2})$ (ΘΜΤ) με ξ μεταξύ ($\Rightarrow$ διάφορο) x και $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow f'(\xi)>0$, έχουμε $f(x)<f(2k\pi+\frac{\pi}{2})<f(y)$ για $x\in\left(2(k-1)\pi+\frac{\pi}{2},\, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $y\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},\, 2(k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$\underset{(1)}{\Longrightarrow}$ f γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},\, 2(k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ (2)
(πβ. και [Πόρισμα, Ντ., σελ.338])

$\Longrightarrow$ f γνησίως αύξουσα (στο $\mathbb{R}$) ((2) ή μεταβατική ιδιότητα) β) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνήσια αύξουσα και συνεχής (ως άθροισμα συνεχών)

$\underset{\theta.[4.35]}{\Longrightarrow} \quad f([\alpha-1, \alpha+1]) = [f(\alpha-1), f(\alpha+1)]$

και $0 \in [f(\alpha-1), f(\alpha+1)]$, αφού $f(\alpha-1) = -1 + \cos(\alpha-1) \leq 0$ και

$f(\alpha+1) = 1 + \cos(\alpha+1) \geq 0$.

Συνεπώς, αφού $f\big|_{[\alpha-1, \alpha+1]} : [\alpha-1, \alpha+1] \to [f(\alpha-1), f(\alpha+1)]$ 1-1

και επί, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\exists !$ (δηλ. μοναδικό) $x \in [\alpha-1, \alpha+1] : f(x) = 0$

$\Longrightarrow$ αν $\alpha = 1$, τότε $x = 0$, αφού $f(0) = 0 + 1 - 1 = 0$

$\alpha > 1$ $\quad x > 0$ $\quad x \geq \alpha - 1 > 0$

$\alpha < 1$ $\quad x < 0$ $\quad x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 1 - \alpha > 0$

($\alpha < -1$ $\quad x < 0$ $\quad x \leq \alpha + 1 < 0$

$\alpha = -1$ $\quad x < 0$ $\quad x \leq \alpha + 1 = 0$ και $f(0) = 1 - \alpha = 2 > 0$)

A. [5.118] $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)=f(\beta)=0$, f αλλάζει πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$

$\Rightarrow$ η $g:=f'+2f$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[\alpha,\beta]$

Λ.: Αφού η f αλλάζει πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, $\exists\, c_1, c_2\in(\alpha,\beta)$ με $f(c_1)f(c_2)<0$, δηλ. η f παίρνει στο (α,β) και θετικές και αρνητικές τιμές. Συνεπώς, αφού ως συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα παίρνει μέγιστο και ελάχιστο, το μέγιστο θα είναι θετικό $f(x_1)>0$ και το ελάχιστο θα είναι αρνητικό $f(x_2)<0$, $x_1, x_2\in(\alpha,\beta)$. Τα ολικά αυτά ακρότατα είναι προφανώς και τοπικά και άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat $f'(x_1)=f'(x_2)=0$. Συνεπώς $g(x_1)g(x_2)<0$ και αφού η g είναι συνεχής $\overset{\text{Θ. Bolzano}}{\Longrightarrow}$ $\exists\,\xi\in(x_1,x_2)$: $g(\xi)=0$.

Άσκηση: α) $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$,

$f'(\alpha)f'(\beta)>0 \implies \exists\, c\in(\alpha,\beta): f(c)=0$

Απόδειξη: χ.β.τ.γ. έστω $f'(\alpha), f'(\beta)>0$, δηλ. $\exists \lim\limits_{x\to\alpha(+)} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)\in\mathbb{R}$

$\exists \lim\limits_{x\to\beta(-)} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}=f'(\beta)\in\mathbb{R} \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta_1\in(0,\beta-\alpha)\ \forall x\in(\alpha,\alpha+\delta_1):$

$\left|\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}-f'(\alpha)\right|<\varepsilon,\ \exists\,\delta_2\in(0,\beta-\alpha)\ \forall x\in(\beta-\delta_2,\beta): \left|\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}-f'(\beta)\right|<\varepsilon$

$\implies$ Για $\varepsilon:=\min\left\{\frac{f'(\alpha)}{2},\frac{f'(\beta)}{2}\right\}>0\ \exists\,\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$

$\forall x\in(\alpha,\alpha+\delta): 0<f'(\alpha)-\frac{f'(\alpha)}{2}\leq f'(\alpha)-\varepsilon<\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \underset{x>\alpha}{\implies} f(x)>f(\alpha)=0$

$\forall y\in(\beta-\delta,\beta): 0<f'(\beta)-\frac{f'(\beta)}{2}\leq f'(\beta)-\varepsilon<\frac{f(y)-f(\beta)}{y-\beta} \underset{y<\beta}{\implies} f(y)<f(\beta)=0$

$\implies \exists\, c_1,c_2\in[\alpha,\beta]: f(c_1)<0<f(c_2)$

$\underset{\text{Θ. Ενδιάμεσων Τιμών}}{\implies} \exists\, c\in(c_1,c_2): f(c)=0.$

β) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$

$$g(x) = 2x^4 + x + f(x), \ x \in [-1,1] \Rightarrow \exists\, c \in (-1,1) : g'(c) = 0$$

Απόδειξη: $g(-1) = 1, \quad g(0) = 0, \quad g(1) = 3$

$$\underset{\text{ΘΜΤ}}{\Longrightarrow} \quad \frac{g(-1) - g(0)}{-1-0} = -1 = g'(\xi_1), \ \xi_1 \in (-1,0),$$

$$\frac{g(0) - g(1)}{0-1} = 3 = g'(\xi_2), \ \xi_2 \in (0,1)$$

$$\underset{\text{Darboux}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, \xi \in (\xi_1, \xi_2) : g'(\xi) = 0$$

13/3/19

A. 5.179 $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής, $g: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}, & x \in (\alpha,\beta] \\ k, & x=\alpha \end{cases}$

α) Αν $\exists f'(\alpha) \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το $k \in \mathbb{R}$, ώστε η g να είναι συνεχής

Αν, επιπλέον, $f'(\alpha) < \mu < \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, τότε $\exists\, \xi \in (\alpha,\beta): f(\xi)-f(\alpha) = \mu(\xi-\alpha)$

β) f δυό φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο (α,β)

$\Rightarrow g$ αύξ. στο (α,β)

γ) $\exists f'': [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \exists g': [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής

Λ.: α) f συνεχής στο $(\alpha,\beta] \Rightarrow g$ συνεχής στο $(\alpha,\beta]$ (άλγεβρα συνεχών συν.)

$$\left.\begin{array}{l} \exists f'(\alpha) \in \mathbb{R} \iff \exists\, f'(\alpha) := \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x). \\ g \text{ συνεχής στο } x=\alpha \underset{\alpha\ \sigma.\sigma.\ D(g)}{\iff} \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = g(\alpha) = k \end{array}\right\} \Rightarrow k = f'(\alpha)$$

$$f'(\alpha) < \mu < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \iff g(\alpha) < \mu < g(\beta) \underset{\text{ΘΕΤ}}{\Rightarrow} \exists\, \xi \in (\alpha,\beta): g(\xi) = \frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha} = \mu$$

β) Νδό: $g'(x) \geq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta) \iff \dfrac{f'(x)(x-\alpha) - (f(x) - f(\alpha)}{(x-\alpha)^2} \geq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$

$\iff h(x) := f'(x)(x-\alpha) - f(x) + f(\alpha) \geq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$,

το οποίο ισχύει, αφού $h(\alpha) = 0$ και $h'(x) = f''(x)(x-\alpha) \geq 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta)$

$\underset{\text{ΘΜΤ}}{\Longrightarrow} \ \forall x \in (\alpha, \beta): \ h(x) = h'(\xi)(x-\alpha), \ \xi \in (\alpha, x) \underset{\substack{h'(\xi) \geq 0, \\ x > \alpha}}{\Longrightarrow} h(x) \geq 0$.

γ) f δυό φορές παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \beta] \Rightarrow \exists \ g' : (\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής:

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-\alpha) - (f(x) - f(\alpha))}{(x-\alpha)^2} \quad \forall x \in (\alpha, \beta] \quad \text{(άλγεβρα παραγωγ. συν.)}$$

$\Rightarrow$ Αφού $f', f, x-\alpha \neq 0$ συνεχής στο $(\alpha, \beta]$, από την άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων έχουμε $\lim\limits_{x \to x_0} g'(x) = g'(x_0) \ \forall x_0 \in (\alpha, \beta]$

$\exists \ g'(\alpha) \in \mathbb{R} \Rightarrow g$ συνεχής στο α, δηλ. $k = f'(\alpha)$ και $\exists \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} =$

$$= \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f''(\xi(x))}{2}, \quad \xi(x) \in (\alpha, x),$$

σύμφωνα με το Θ. Taylor, αν $\exists \ f''$ στο $[\alpha, \beta]$.

Αφού $\lim_{x\to\alpha} \xi(x) = \alpha$ (Θ. Ισοσυγκλ. Συν.), αν f'' συνεχής στο α, τότε

$\exists \lim_{x\to\alpha} \frac{f''(\xi(x))}{2} = \frac{f''(\alpha)}{2}$ (Σύνθεση Συνεχών). Τότε ισχύει και

$$\lim_{x\to\alpha}\left(g'(x) - g'(\alpha)\right) = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)(x-\alpha) - f(x) + f(\alpha) - \frac{f''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2}{(x-\alpha)^2}$$

$$= \lim_{x\to\alpha} -\frac{f''(\xi(x)) - f''(\alpha)}{2} + \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x) - f'(\alpha)}{x-\alpha} = -f''(\alpha) + f''(\alpha) = 0.$$

Άσκηση: Να εξετάσετε με την βοήθεια του ακολουθιακού ορισμού αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ είναι συνεχής.

Λ.: Έστω $\xi \in (0,\infty)$ και $(x_\nu) \subset [0,\infty)$ με $x_\nu \to \xi$. Τότε

$$|f(x_\nu) - f(\xi)| = |\sqrt{x_\nu} - \sqrt{\xi}| = \frac{|x_\nu - \xi|}{\sqrt{x_\nu} + \sqrt{\xi}} \leq \frac{1}{|\xi|}|x_\nu - \xi|,$$ και αφού

$$x_\nu \to \xi \iff x_\nu - \xi \to 0 \iff |x_\nu - \xi| \to 0 \underset{\text{αλγ. ορ.}}{\iff} \frac{1}{|\xi|}|x_\nu - \xi| \to 0,$$ από

το Θ. Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών έχουμε $|f(x_\nu) - f(\xi)| \to 0$.

Έστω $x_\nu \geq 0$ με $x_\nu \to 0$ και έστω (τυχαίο αλλά σταθερό) $\varepsilon > 0$.

Τότε $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : x_\nu < \varepsilon^2 \Rightarrow f(x_\nu) = \sqrt{x_\nu} < \varepsilon$.

(Πβ. Θ. [1.48, στ)], Σημ. 2.1/13-16.)

[Για την απόδειξη της συνέχειας με τον ε-δ-ορισμό, βλ. Σημ. 7.2/14]

Α. [3.21] Η $f(x) = x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένη

Λ.: δηλ. <u>δεν</u> ισχύει: $\exists\, M > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M$,

δηλ. ισχύει: $\forall M > 0 \ \exists\, x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq M$:

Έστω $M > 0 \underset{\text{Αρχιμήδεια Ιδ.}}{\Longrightarrow} \exists\, \nu \in \mathbb{N} : \nu > \dfrac{M - \frac{\pi}{2}}{2\pi}$, δηλ. $2\pi\nu + \frac{\pi}{2} > M$

$\Rightarrow f(2\pi\nu + \frac{\pi}{2}) = 2\pi\nu + \frac{\pi}{2} > M$.

Α. [3.22] : Είναι η συνάρτηση $f(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$, φραγμένη;

Λ.: Ναι, αφού $|f(x)| = \left|2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right| \leq 2|x| + 1 \leq 3 \ \forall x \in (0,1]$,

δηλ. $\exists\, M > 0$ (κάθε $M \geq 3$) : (ούτως ώστε) $\forall x \in (0,1] : |f(x)| \leq M$.

A. [3.25] Να εξετάσετε αν είναι φραγμένες οι συναρτήσεις

α) $f(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} \sin\frac{1}{x} - x^{-\frac{2}{3}} \cos\frac{1}{x}$, $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$

Λ.: Όχι, γιατί $\forall M > 0 \ \exists \ \nu \in \mathbb{N}$ με $\nu > \frac{M}{2\pi}$ (Αρχιμ. Ιδ.) με

$$\frac{1}{(2\pi\nu)^{3/2}} \in (0,1) \quad \text{και} \quad \left| f\left(\frac{1}{(2\pi\nu)^{3/2}}\right) \right| = \left| -2\pi\nu \right| = 2\pi\nu > M.$$

(Συνεπώς, δεν ισχύει: $\exists M > 0 \ \forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}$: $|f(x)| \leq M$,

δηλ. η $f : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένη)

β) $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{2 - \cos x}$, $x \in [0, 2\pi]$

Λ.: Ναι, γιατί $|f(x)| \leq \frac{x^4 + 3x^2 + 2}{2 - \cos x} \leq x^4 + 3x^2 + 2$

$\leq (2\pi)^4 + 3(2\pi)^2 + 2 \quad \forall x \in [0, 2\pi]$

[Εναλλακτική λύση: Ναι, ως συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα] γ) $f(x) = \dfrac{5x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2}$, $x \in [-1, 1]$

Λ.: $|f(x)| \le \dfrac{5x^2 + 3|x| + 1}{|x^2 - 2|} \le 5x^2 + 3|x| + 1 \le 5 + 3 + 1 = 9$ $\forall x \in [-1, 1]$

[Εναλλακτικά: Ναι, ως συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα]

δ) $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^3}$, $x \in [0, \infty)$

Λ.:

$$\left.\begin{aligned} &|f(x)| \le \frac{1 + x^3}{1 + x^3} = 1 \quad \forall x \ge 1 \quad (\Leftrightarrow x^3 \ge x^2), \\ &|f(x)| \le 1 + x^2 \le 2 \quad \forall x \in [0, 2] \end{aligned}\right\} \Rightarrow |f(x)| \le 2 \quad \forall x \in [0, \infty)$$

A. [3.26] $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα, $\xi \in A$, $f_1 := f|_A$. ⌊13B/16

Τότε: $\exists \lim\limits_{x\to\xi} f(x) \in \tilde{\mathbb{R}} \iff \exists \lim\limits_{x\to\xi} f_1(x) \in \tilde{\mathbb{R}}$ και $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi} f_1(x)$

Λ.: $\boxed{(\forall):\ 0<\delta'<\delta \Rightarrow N^*_{\delta'}(\xi) \subset N^*_{\delta}(\xi)}$ $A = (\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$,

$\xi \in (\alpha,\beta) \Rightarrow \forall \delta \in (0,\delta_0)$, $\delta_0 := \min\{\xi-\alpha, \beta-\xi\}$: $N^*_\delta(\xi) \subset N_\delta(\xi) \subset (\alpha,\beta) = A$

$$\exists\, \ell := \lim_{x\to\xi} f(x) \in \tilde{\mathbb{R}} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in N^*_\delta(\xi): \begin{cases} |f(x)-\ell|<\varepsilon, & \ell\in\mathbb{R} \\ f(x) > \frac{1}{\varepsilon}, & \ell \text{"="} \infty \\ f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}, & \ell \text{"="} -\infty \end{cases}$$

$$\overset{}{\underset{(\ast)}{\iff}} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta_1 \in (0,\delta_0)\ \forall x \in N^*_{\delta_1}(\xi): \quad \text{———} \parallel \text{———}$$

$$\underset{(\ast)}{\iff} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta_2>0\ \forall x \in N^*_{\delta_2}(\xi) \cap A: \quad \text{———} \parallel \text{———}$$

$$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta_2>0\ \forall x \in N^*_{\delta_2}(\xi) \cap A: \begin{cases} |f_1(x)-\ell|<\varepsilon, & \ell\in\mathbb{R} \\ f_1(x) > \frac{1}{\varepsilon}, & \ell \text{"="} \infty \\ f_1(x) < -\frac{1}{\varepsilon}, & \ell \text{"="} -\infty \end{cases}$$

$$\iff \exists\, \ell := \lim_{x\to\xi} f_1(\xi) \in \tilde{\mathbb{R}}$$

13/3/17

A.[3.27] $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $B\subseteq\mathbb{R}$ κλειστό διάστημα, $\xi\in B$, $f_2 := f|_B$

Τότε : $\exists \lim_{x\to\xi} f(x)\in\tilde{\mathbb{R}} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \exists \lim_{x\to\xi} f_2(x)\in\tilde{\mathbb{R}}$

Α.: $B=[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$.

Αν $\xi\in(\alpha,\beta)$, τότε (A.[3.26]): $\exists \lim_{x\to\xi} f(x)\in\tilde{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to\xi} f_2(x)\in\tilde{\mathbb{R}}$

Αν $\xi\in\{\alpha,\beta\}$, τότε

$$\exists\, \ell := \lim_{x\to\xi} f(x)\in\tilde{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in N_\delta^*(\xi): \begin{cases} |f(x)-\ell|<\varepsilon, & \ell\in\mathbb{R} \\ f(x)>\frac{1}{\varepsilon}, & \ell "=" \infty \\ f(x)<-\frac{1}{\varepsilon}, & \ell "=" -\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in N_\delta^*(\xi)\cap B: \text{———} '' \text{———}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \ell := \lim_{x\to\xi} f_2(\xi)\in\tilde{\mathbb{R}}$$

$\not\Leftarrow$: Αν $\exists \lim\limits_{\substack{x\to\alpha+\\(\beta-)}} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to\alpha-\\(\beta+)}} f(x)$, τότε $\exists \lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\(\beta)}} f_2(x)$, $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\(\beta)}} f(x)$

13/3/18

A. [4.74] $f:[0,1]\to[0,1]$ συνεχής με $f(0)=0$ και

$$|f(x)-f(y)| \geq |x-y| \quad \forall x,y\in[0,1] \qquad (1)$$

1) Ν.δ.ό. $f(x)\geq x \quad \forall x\in[0,1]$

2) Έστω $x_1\in[0,1]$ και $x_{\nu+1}=f(x_\nu)$, $\nu\in\mathbb{N}$.

Ν.δ.ό. α) $\exists \lim x_\nu \in \mathbb{R}$

β) $f(\lim x_\nu) = \lim x_\nu$

γ) $f(x)=x \quad \forall x\in[0,1]$

Λ.: 1) Από την (1) και αφού $D(f), R(f)\subseteq[0,\infty)$ έχουμε ειδικότερα

για $y=0$: $f(x)=|f(x)|\geq|x|=x \quad \forall x\in[0,1]$

2) α) $x_1\in[0,1]$, $x_{\nu+1}=f(x_\nu)\in[0,1] \ \forall \nu\in\mathbb{N} \Rightarrow (x_\nu)\subset[0,1]$ (2)

$\Rightarrow x_{\nu+1}-x_\nu = f(x_\nu)-x_\nu \underset{1)}{\geq} 0 \quad \forall \nu\in\mathbb{N} \quad (3)$

$(2), (3) \Leftrightarrow (x_\nu)$ αύξουσα και φραγμένη

$\Rightarrow \exists\ \xi := \lim x_\nu = \sup\{x_\nu ; \nu \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \underset{(2)}{\Rightarrow} \xi \in [0,1]$

β) $\left.\begin{array}{l} \underbrace{x_{\nu+1}}_{\to \xi} = \underbrace{f(x_\nu)}_{\to f(\xi)}, \text{ αφού } f \text{ συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow \xi = f(\xi)$

γ) $\forall \nu \in \mathbb{N}: \quad f(x_{\nu+1}) = x_{\nu+2} \underset{(3)}{\geq} x_{\nu+1} = f(x_\nu) \qquad (4)$

$\Rightarrow f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu) \underset{(4)}{=} |f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu)| \underset{(1)}{\geq} |x_{\nu+1} - x_\nu| \underset{(3)}{=} x_{\nu+1} - x_\nu$

$\Rightarrow f(x_{\nu+1}) - x_{\nu+1} \geq f(x_\nu) - x_\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 0 \leq f(x_1) - x_1 \leq f(x_\nu) - x_\nu \leq \sup\{f(x_\nu) - x_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$

$= \lim [f(x_\nu) - x_\nu]$

$= f(\xi) - \xi = 0$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N}: f(x_\nu) = x_\nu$

$\Rightarrow f(x_1) = x_1 \quad \forall x_1 \in [0,1]$

A. [5.86] Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων 13/3/20

ε) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)\,\mathrm{Arctg}\,x - \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{x-1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

Λ.: $f'(x) = x\,\mathrm{Arctg}\,x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}x - \frac{1}{2} = x\left(\mathrm{Arctg}\,x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

Συνεπώς $f'(x) = 0 \iff x \in \{0, 1\}$ (αφού $\mathrm{Arctg}\,x = \frac{\pi}{4} \iff x = 1$).

$f''(x) = \mathrm{Arctg}\,x - \frac{\pi}{4} + x\frac{1}{1+x^2} \implies f''(0) = -\frac{\pi}{4}$, $f''(1) = \frac{1}{2}$

$\implies$ τοπικό = ολικό ελάχιστο $= f(\frac{1}{2})$,

τοπικό = ολικό μέγιστο $= f(0)$

ζ) $f(x) = (1-x)^{1-x} x^x, \quad x \in (0,1)$

Λ.: $f(x) = e^{(1-x)\ln(1-x)} e^{x \ln x} = e^{(1-x)\ln(1-x) + x\ln x}, \quad D(f) = (0,1)$

$\Rightarrow f'(x) = f(x)\left[-\ln(1-x) - 1 + \ln x + 1\right] = f(x) \ln \frac{x}{1-x}$

Συνεπώς, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{x}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = 1 \Leftrightarrow x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$f''(x) = f'(x) \ln \frac{x}{1-x} + f(x)[\cdots]' = f(x)\left(\ln^2 \frac{x}{1-x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow f''(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})\, 4 > 0$

$\Rightarrow$ τοπικό = ολικό ελάχιστο $= f(\frac{1}{2})$,

δεν έχει ούτε τοπικό ούτε ολικό μέγιστο

(f γν. φθ. στο $(0, \frac{1}{2})$, γν. αύξ. στο $(\frac{1}{2}, 1)$)

η) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ |x|, & x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi x}{2}, & x \in (\frac{1}{2}, 4] \end{cases}$ Λ.: $f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, -\frac{1}{2}) \\ -1, & x \in (-\frac{1}{2}, 0) \\ 1, & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}, & x \in (\frac{1}{2}, 4] \end{cases}$ 13Β/22

$x \in [-1, -\frac{1}{2})$: $f(x) = 1$ τοπικό ελάχιστο και τοπικό (και ολικό) μέγιστο

$x = -\frac{1}{2}$: $f(-\frac{1}{2}) = 1$ τοπικό (και ολικό) μέγιστο

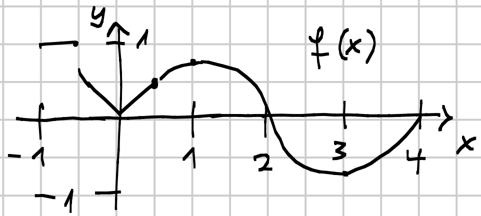
$x = 0$: $f(0) = 0$ τοπικό ελάχιστο

$x = \frac{1}{2}$: $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ δεν είναι ακρότατο (f γν. αύξ. στο $[0, 1]$)

$x = 1$: $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ τοπικό μέγιστο

$x = 3$: $f(3) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ τοπικό (και ολικό) ελάχιστο

$x = 4$: $f(4) = 0$ τοπικό μέγιστο



A. [5.89] Να αποδείξετε ότι η $f(x)=(\mathrm{tg}\,x)^{\sin x-\cos x}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$ 13Β/23

έχει τοπικό ελάχιστο για $x=\frac{\pi}{4}$.

Λ.:

$$f(x)=\left(e^{\ln(\mathrm{tg}\,x)}\right)^{\sin x-\cos x} = e^{(\sin x-\cos x)\ln(\mathrm{tg}\,x)}, \quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x)\left[(\sin x-\cos x)\ln(\mathrm{tg}\,x)\right]'$$

Παραγώγιση Σύνθεσης Συν.

$$= f(x)\left[(\cos x+\sin x)\ln(\mathrm{tg}\,x) + (\sin x-\cos x)\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}(1+\mathrm{tg}^2x)\right]$$

$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, αφού $(\mathrm{tg}\,x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}=1+\mathrm{tg}^2x$

$$\Rightarrow f''(x) = f'(x)[\cdots] + f(x)[\cdots]' = f(x)\left([\cdots]^2+[\cdots]'\right)$$

$$= f(x)\left([\cdots]^2 + (-\sin x+\cos x)\ln(\mathrm{tg}\,x) + 2(\cos x+\sin x)\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}(1+\mathrm{tg}^2x)\right.$$

$$\left. + (\sin x-\cos x)\left(-\frac{1}{\mathrm{tg}^2x}(1+\mathrm{tg}^2x)+1+\mathrm{tg}^2x\right)\right)$$

Αφού $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ $\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin x \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} \cos x\right)$

έχουμε $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)\left[\left(2\cos\frac{\pi}{4}\right)\underbrace{\ln 1}_{=0} + \underbrace{\left(\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\right)}_{=0}\cdot 2\right] = 0,$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\left[\,0\,\right]^2 + 0\cdot \ln 1 + 8\cos\frac{\pi}{4} + 0\cdot 0\right)$$

$$= \underbrace{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{>0,\ \text{αφού } e^y>0\ \forall y\in\mathbb{R}} 8\cos\frac{\pi}{4} > 0, \text{ αφού } \cos\frac{\pi}{4} > 0$$

Συνεπώς, από το κριτήριο ν-οστής (εδώ: δεύτερης) παραγώγου, αφού $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ και $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = \frac{\pi}{4}$.

Α. [5.92] Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \mathrm{Arctg}\,\frac{1-x}{1+x}$, $x \in [0,1]$

Λ.: $\mathrm{Arctg}'x = \frac{1}{1+x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Arctg}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ γν. αύξ.

$g(x) := \frac{1-x}{1+x}$, $x \in [0,1] \Rightarrow g'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$

($\Rightarrow$ η επέκταση της g στο $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ είναι γν. φθίνουσα)

$\Rightarrow$ g γν. φθίνουσα $\Rightarrow \max g = g(0) = 1$, $\min g = g(1) = 0$

$\Rightarrow \max f = \mathrm{Arctg}(\max g) = \mathrm{Arctg}(g(0))$

Arctg γν. αύξ.

$= f(0) = \mathrm{Arctg}\,1 = \mathrm{Arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \left(\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$,

$\min f = \mathrm{Arctg}(\min g) = \mathrm{Arctg}(g(1))$

$= f(1) = \mathrm{Arctg}\,0 = \mathrm{Arctg}(\mathrm{tg}\,0) = 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

β) $f(x) = e^{x^2-x}$, $x \in [0,2]$

Λ.: $g(x) := x^2 - x$, $x \in [0,2]$ $\Rightarrow$ $g'(x) = 2x - 1 \begin{cases} < 0, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ = 0, & x = \frac{1}{2} \\ > 0, & x \in (\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\min g = g(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$,

$\max g = \max\{g(0), g(2)\} = \max\{0, 2\} = g(2) = 2$

$\Rightarrow$ $\min f = e^{\min g} = e^{g(\frac{1}{2})} = f(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{4}}$,

e^y, $y \in \mathbb{R}$, γν. αύξ.

$\max f = e^{\max g} = e^{g(2)} = f(2) = e^2$

γ) $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2+2}$, $x \in [0,2]$ $\Rightarrow$ $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x^2+2}$

$\Rightarrow$ $\max f = f(0) = \frac{5}{2}$, $\min f = f(2) = \frac{3}{2}$

x^2, $x \geq 0$, γν. αύξ.

[για τα δ), ε), βλ. Σημ. 12.1/11–13]