$\boxed{1}$ Να βρεθούν τα $\sup A$ και $\inf A$ για

i) $A = \left\{ \frac{\nu}{\nu+1} : \nu \in \mathbb{N} \right\}$

ii) $A = \{ x \in \mathbb{R} : |x| + |x+1| < 2 \}$

Λύση: i) $0 < \frac{\nu}{\nu+1} < \frac{\nu+1}{\nu+1} = 1 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

Επειδή $\frac{\nu+1}{\nu+2} > \frac{\nu}{\nu+1} \iff (\nu+1)^2 > \nu^2 + 2\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

η ακολουθία $\alpha_\nu := \frac{\nu}{\nu+1}$ είναι γνησίως αύξουσα και $\alpha_\nu \geq \alpha_1 = \frac{1}{2} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$. Άρα $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$

Από την άλλη $\left[\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{\nu+1} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{1+\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{1+0} = 1 \right]$

έχουμε την υποψία, ότι ενδεχομένως, $\sup A = 1$. $\boxed{1A/2}$

Πράγματι, το 1 είναι άνω φράγμα.

Μένει για τυχαίο $\varepsilon > 0$ να βρούμε ένα $\frac{\nu}{\nu+1} > 1 - \varepsilon \iff$

$$\iff \varepsilon > 1 - \frac{\nu}{\nu+1} = \frac{1}{\nu+1} \iff \nu + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff \nu > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

[Για $\varepsilon \geq 1$ αυτό είναι προφανές αφού $\nu \in \mathbb{N}$, δηλ. $\nu > 0$.

Για $\varepsilon \in (0,1)$] αυτό προκύπτει απ' την Αρχιμήδεια Ιδιότητα:

$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \nu > x.$

ιι) $A = \{ x \in \mathbb{R} : |x| + |x+1| < 2 \}$ και $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$,

$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}$

$\boxed{1A/3}$

Άρα $A = \underbrace{\{ x \in [0,\infty) : \underbrace{x + x + 1 < 2}_{\Leftrightarrow\, 2x < 1 \,\Leftrightarrow\, x < \frac{1}{2}} \}}_{= [0, \frac{1}{2})}$

$\cup \underbrace{\{ x \in [-1, 0) : \underbrace{-x + x + 1 < 2}_{\Leftrightarrow\, 1 < 2} \}}_{= [-1, 0)}$

$\cup \underbrace{\{ x \in (-\infty, -1) : \underbrace{-x - x - 1 < 2}_{\Leftrightarrow\, -2x < 3 \,\Leftrightarrow\, x > -\frac{3}{2}} \}}_{= (-\frac{3}{2}, -1)}$

$\Rightarrow A = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \Longrightarrow$ $\inf A = -\frac{3}{2}$, $\sup A = \frac{1}{2}$

Εφαρμογή στο μάθημα 10.11.11

11/4

$\boxed{2}$ Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη κενό και φραγμένο σύνολο και B ένα μη κενό υποσύνολο του A. Να αποδείξετε ότι:

$$\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A \, . \quad (*)$$

$$\left[\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R} \, , \; \exists \, m, M \in \mathbb{R} \; \forall x \in A : \; m \leq x \leq M \implies (*) \right]$$

<u>Απόδειξη:</u> Αφού $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$, A φραγμένο, $\exists \inf A, \sup A \in \mathbb{R} : \forall \alpha \in A$ $\inf A \leq \alpha \leq \sup A$. Αφού $B \subseteq A$, $\forall \beta \in B : \beta \in A \implies \forall \beta \in B :$ $\inf A \leq \beta \leq \sup A$, δηλ. το B είναι φραγμένο. Αφού $B \neq \emptyset$, σύμφωνα με το Αξίωμα Πληρότητας $\exists \inf B, \sup B \in \mathbb{R}$ και ισχύει $\inf A \leq \inf B$, $\sup B \leq \sup A$. (1)

Επίσης, αφού $B \neq \emptyset$ $\exists \beta \in B :$ $\inf B \leq \beta \leq \sup B$
$\implies$ (μεταβατική ιδιότητα) $\inf B \leq \sup B$ (2). Από τις (1), (2) έχουμε την $(*)$.

$\square$

$\boxed{3}$ Έστω ότι $A, B \subseteq \mathbb{R}$ είναι δύο φραγμένα και μη κενά σύνολα.
Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι ισότητες:

$$i) \quad \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

$$ii) \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

<u>Απόδειξη:</u> $A, B \subseteq A \cup B \Rightarrow \inf(A \cup B), \sup(A \cup B)$ είναι αντίστοιχα άνω και κάτω φράγματα και του A και του B

$\Rightarrow$ Ορισμός των inf, sup

$$\inf(A \cup B) \leq \inf A, \inf B$$

$$\sup(A \cup B) \geq \sup A, \sup B \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \inf(A \cup B) \leq \min\{\inf A, \inf B\}, \ \sup(A \cup B) \geq \max\{\sup A, \sup B\}$$

$$\forall \alpha \in A \cup B : \ \alpha \in A \vee \alpha \in B \Rightarrow \inf A \leq \alpha \leq \sup A \ \vee \ \inf B \leq \alpha \leq \sup B$$

$\Rightarrow \min\{\inf A, \inf B\} \leq \alpha \leq \max\{\sup A, \sup B\}$, δηλ. αριστερά και δεξιά έχουμε ένα κάτω και ένα άνω φράγμα του $A \cup B$, αντίστοιχα.

$\xrightarrow{\text{Ορ. των inf, sup}}$ $\min\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cup B)$, $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ $\qquad (2)$

Από τις (1) και (2) έχουμε τις i), ii) $\square$

[4] Έστω A και B δύο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα 11A/6

$$\forall x \in A \ \forall y \in B : x \leq y .$$

Να αποδείξετε ότι: $\sup A \leq \inf B$

Απόδειξη: Κατ' αρχήν τα $\sup A, \inf B \in \mathbb{R}$ [δηλ., υπάρχουν ως πραγματικοί αριθμοί] γιατί για τυχαίο $x \in A$: $x \leq y \ \forall y \in B$ (*), άρα το B είναι ένα μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ $\underset{\text{Αξ. Πλ.}}{\Longrightarrow}$ $\exists \inf B \in \mathbb{R}$

Αντίστοιχα, για τυχαίο $y \in B$: $y \geq x \ \forall x \in A$, άρα το A είναι ένα μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ $\underset{\text{Αξ. Πλ.}}{\Longrightarrow}$ $\exists \sup A \in \mathbb{R}$.

Εξάλλου η (*) λέει ότι κάθε $x \in A$ είναι κάτω φράγμα του B, άρα $\forall x \in A$: $x \leq \inf B$ (Ορ. του inf). Τότε όμως το $\inf B$ είναι ένα άνω φράγμα του A και άρα (Ορ. του sup) $\sup A \leq \inf B$.

Π

$\boxed{5}$ Έστω A, B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. [11A/7]

Αν $\sup A = \inf B$, τότε $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha \in A, \beta \in B : \beta - \alpha < \varepsilon$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\sup A = \inf B = M \implies$

Χαρακτ. των inf και sup

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha \in A : \alpha > M - \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\exists \beta \in B : \beta < M + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha \in A, \beta \in B : \underbrace{\alpha > M - \frac{\varepsilon}{2}}_{\iff -\alpha < -M + \frac{\varepsilon}{2}} \wedge \beta < M + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \beta - \alpha < M + \frac{\varepsilon}{2} - \alpha < \underbrace{M + \frac{\varepsilon}{2} - M + \frac{\varepsilon}{2}}_{= \varepsilon}.$$

$\square$

6 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ δύο μη κενά και φραγμένα σύνολα.

Ορίζουμε $A - B := \{ x \in \mathbb{R} : x = \alpha - \beta,\ \alpha \in A,\ \beta \in B \}$.

Να αποδείξετε ότι τα $\inf(A-B)$ και $\sup(A-B)$ υπάρχουν και ισχύει

i) $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$

ii) $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$

__Απόδειξη:__

Αφού A, B φραγμένα, υπάρχουν τα $\inf A, \sup A, \inf B, \sup B \in \mathbb{R}$ και ισχύουν:

$$\left.\begin{aligned} &\forall \alpha \in A : \inf A \leq \alpha \leq \sup A \\ &\forall \beta \in B : \underbrace{\inf B \leq \beta \leq \sup B} \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow -\sup B \leq -\beta \leq -\inf B$$

Έστω τυχαίο $x \in A - B \Rightarrow \exists\, \alpha \in A,\ \beta \in B :\ x = \alpha - \beta$

$\Rightarrow \quad \inf A - \sup B \leq \inf A - \beta \leq x \leq \sup A - \beta \leq \sup A - \inf B$

δηλαδή το $A - B$ είναι κάτω φραγμένο από το $\inf A - \sup B$ και άνω φραγμένο από το $\sup A - \inf B$.

$\underset{\text{Αξ. Πλ.}}{\Rightarrow} \quad \exists\ \sup(A - B) \leq \sup A - \inf B \quad (1)$

$\exists\ \inf(A - B) \geq \inf A - \sup B \quad (2)$

i): Σύμφωνα με τα Θ. [1.10] και [1.11],

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_1 \in A,\ y_1 \in B :\quad x_1 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2},\ y_1 < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ x_1 - y_1 \in A - B :\ x_1 - y_1 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} - \inf B - \frac{\varepsilon}{2}$

δηλ. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, z \in A - B :\ z > \sup A - \inf B - \varepsilon \underset{\Theta.[1.10]\ \&\ (1)}{\Longrightarrow}$ i)

ii) : Αντίστοιχα, $\forall \varepsilon>0\ \exists\ x_2 \in A,\ y_2 \in B$: $x_2 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$,

$y_2 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\ x_2 - y_2 \in A - B$: $x_2 - y_2 < \inf A - \sup B + \varepsilon$

$\Longrightarrow$ ii) ◻

Θ. [1.11] & (2)

<u>Εφαρμογή</u> : Με $B = A$ έχουμε : $\sup(A-A) = \sup A - \inf A$,

$\inf(A-A) = \inf A - \sup A$

Έστω π.χ. $A = (\alpha, \beta)$, $\alpha < \beta$.

Τότε $A - A = \{ z \in \mathbb{R} : z = x - y,\ x \in (\alpha,\beta),\ y \in (\alpha,\beta) \}$

$= (\alpha - \beta, \beta - \alpha)$.

$\boxed{7}$ Έστω A ένα μη κενό και φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών με θετικό κάτω φράγμα και $B := \left\{ \frac{1}{x} : x \in A \right\}$.
Να αποδείξετε ότι το B είναι φραγμένο και ότι

$$\inf B = \frac{1}{\sup A} \quad \text{και} \quad \sup B = \frac{1}{\inf A}$$

<u>Απόδειξη</u>: Αφού το A είναι φραγμένο, υπάρχουν τα

$\inf A, \sup A \geq m > 0$ με $0 < \inf A \leq x \leq \sup A \quad \forall x \in A$

$\Rightarrow$ Αξ. Διάταξης

$$0 < \frac{1}{\sup A} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf A} \quad \forall x \in A, \text{ δηλ.}$$

$$0 < \frac{1}{\sup A} \leq y \leq \frac{1}{\inf A} \quad \forall y \in B. \qquad (1)$$

Έστω μ τυχαίο κάτω φράγμα του B, δηλ. $\mu \leq \frac{1}{x} \quad \forall x \in A$
($\mu > 0$)

$\Rightarrow x \leq \frac{1}{\mu} \ \forall x \in A \Rightarrow \frac{1}{\mu} \geq \sup A \Leftrightarrow \mu \leq \frac{1}{\sup A}$ (2)

(για $\mu \leq 0$ αυτό είναι προφανές, αφού $\sup A > 0$).

Από τα (1) και (2): $\inf B = \frac{1}{\sup A}$.

Αντίστοιχα, έστω M τυχαίο άνω φράγμα του B, δηλ.

$M \geq \frac{1}{x} \ (>0) \ \forall x \in A \Rightarrow x \geq \frac{1}{M} \ \forall x \in A \Rightarrow \frac{1}{M} \leq \inf A$

$\Rightarrow M \geq \frac{1}{\inf A}$ (3)

Από την (1) και (3): $\sup B = \frac{1}{\inf A}$. $\square$

$\boxed{8}$ (Εργασία για το σπίτι): Να αποδείξετε ότι το σύνολο

$S = \{ x \in \underbrace{\mathbb{Q}^+}_{:= \{ x \in \mathbb{Q} \,:\, x > 0 \}} : 0 < x^2 < 3 \}$ δεν έχει supremum στο $\mathbb{Q}$.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε το $y = \frac{3(1+\mu)}{3+\mu}$ ή το $y = \frac{3+2\mu}{2+\mu}$.

Παρατήρηση: Αφού το S δεν είναι κενό, επειδή $1 \in S$, και είναι και άνω φραγμένο, π.χ. από το 3, αφού $\forall x \in S$: $x < 3$, επειδή $x > 0$ και $0 < x^2 < 3 < 9 \Rightarrow 9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (3-x)(3+x) > 0 \underset{3+x>3>0}{\Longrightarrow} 3 - x > 0$, η απόδειξη του ζητούμενου είναι ένα ακόμα αντιπαράδειγμα που δείχνει ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πλήρες.

Απόδειξη: Έστω ότι $\mu = \sup S \in \mathbb{Q}$. Από το Αξίωμα της Τριχοτομίας έχουμε ένα και μόνο ένα από τα

α) $\mu^2 < 3$, β) $\mu^2 > 3$, γ) $\mu^2 = 3$.

Θεωρούμε τον αριθμό $y = \frac{3(1+\mu)}{3+\mu}$ ο οποίος υπάρχει, αφού $\mu = \sup S > x \;\forall x \in S$ και $1 \in S$, δηλ. $\mu > 1 > 0$, και άρα $3+\mu > 0$. Επίσης, $y \in \mathbb{Q}^+$, αφού το $\mathbb{Q}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό (δηλ. $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+y, xy \in \mathbb{Q}$) και $3+\mu, 1+\mu > 0$, και άρα και $y^2 > 0$. Γι' αυτό το y έχουμε

$$\mu - y = \mu - \frac{3(1+\mu)}{3+\mu} = \frac{3\mu + \mu^2 - 3 - 3\mu}{3+\mu} = \frac{\mu^2 - 3}{3+\mu}$$

και $3-y^2 = 3 - \frac{9(1+\mu)^2}{(3+\mu)^2} = \frac{3(9+6\mu+\mu^2) - 9(1+2\mu+\mu^2)}{(3+\mu)^2} = \frac{6(3-\mu^2)}{(3+\mu)^2}$

Έστω ότι ισχύει το α), δηλ. $\mu^2 < 3$. Αλλά τότε $\mu - y < 0$ (αφού $3+\mu > 0$) και $3-y^2 > 0$, δηλ. $\mu < y$ και $y^2 < 3$ με $y^2 > 0$ και $y \in \mathbb{Q}^+$, δηλ. $y \in S$, που είναι άτοπο, αφού το μ είναι άνω φράγμα του S.

Έστω ότι ισχύει το β), δηλ. $\mu^2 > 3$. Αλλά τότε $\mu - y > 0$ και $3 - y^2 < 0$, δηλ. $y < \mu$ και $3 < y^2 \Rightarrow$ $\forall x \in S: \ x < y$, αφού $x^2 < 3 < y^2 \Rightarrow (y-x)(y+x) > 0 \underset{y+x>0}{\Rightarrow} y > x$, που είναι άτοπο, αφού το μ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του S.

Έστω ότι ισχύει το γ), δηλ. $\mu^2 = 3$. Αφού $\mu \in \mathbb{Q}^+$, υπάρχουν $p, q \in \mathbb{N}$ που δεν έχουν κοινό διαιρέτη διάφορο του 1

με $\mu = \frac{p}{q} \Rightarrow \mu^2 = \frac{p^2}{q^2} = 3 \Rightarrow p^2 = 3q^2$

$\Leftrightarrow p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 2q^2$. Αν $q = 2n$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow p = 2k$,

$k \in \mathbb{N}$ (αν $p = 2k-1 \Rightarrow p-q = 2(k-n)-1$, $p+q = 2(k+n)-1$

$\Rightarrow (p-q)(p+q) = 4(k-n)(k+n) - 2(k+n-k+n)+1$, δηλ. $2q^2$ μονός)

το οποίο είναι άτοπο. Αν $q = 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$, και p ζυγός, τότε

$(p-q)(p+q)$ μονός, άτοπο. Άρα $p = 2k-1$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$(p-q)(p+q) = 2(k-n)\,2(k+n-1) = 2q^2 \Rightarrow q^2$ ζυγός $\Rightarrow$

q ζυγός, άτοπο. Αφού όλες οι δυνατότητες για $p, q \in \mathbb{N}$ με

μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1 και $\frac{p}{q} = \mu$, $\frac{p^2}{q^2} = 3$ οδηγούν

σε άτοπο, δεν υπάρχει ρητός μ με $\mu^2 = 3$. $\square$