Σημειώσεις Γιάννη Γιαννούλη, Απειροστικός Λογισμός Ι, Τμήμα Μαθηματικών, Χειμερινό εξάμηνο 2011-12, Ιωάννινα

1.1/0

Notiztitel 28.12.2011

Οι παρούσες σημειώσεις χρησιμοποιήθηκαν από τον διδάσκοντα στο τμήμα των πρωτοετών φοιτητών με ζυγούς αριθμούς μητρώου. Περιέχουν την ύλη που συμφωνήθηκε με τον συνδιδάσκοντα (στο τμήμα των φοιτητών με μονούς αριθμούς μητρώου) Καθηγητή Σωτήρη Ντούγια να παρουσιασθεί στον πίνακα στην βάση του βιβλίου του τελευταίου "Απειροστικός Λογισμός Ι", γ' έκδοση, Leader Books, 2007.

Απ' τα δύο παραπάνω προκύπτει ότι

α) ενδεχομένως οι σημειώσεις να διαφέρουν σε κάποια σημεία από τα αντίστοιχα κείμενα του βιβλίου

β) οι σημειώσεις περιέχουν μόνο τα βασικότερα που πρέπει να γνωρίζει ο φοιτητής. Για μια πιο πλήρη γνώση της ύλης ο διδάσκοντας ΚΡΙΝΕΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΗ ΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ, ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ, ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ.

Εισαγωγικά

Notiztitel 06.11.2011

Διδάσκων (ζυγοί αριθμοί μητρώου):

Γιάννης Γιαννούλης (Γραφείο: 413β, e-mail: giannoul@uoi.gr)

Ερωτήσεις: Δευτέρα 15.00 – 16.00

Κύρια βιβλιογραφία: Σωτήρη Ντούγια, Απειροστικός Λογισμός Ι

Επιπλέον βιβλιογραφία:

1) W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis
[Αρχές Μαθηματικής Ανάλυσης]

2) L. Brand, Advanced Calculus
[Μαθηματική Ανάλυση]

Κεντρική έννοια του Απειροστικού Λογισμού (Ανάλυσης) είναι η έννοια του ορίου.
[σε αντιδιαστολή π.χ. ως προς την Άλγεβρα]
Στην Πραγματική Ανάλυση τα σύνολα, συναρτήσεις, όρια που εξετάζουμε "ζουν" σε υποσύνολα του (μονοδιάστατου, πολυδιάστατου ή απειροδιάστατου) πραγματικού χώρου και στηρίζονται στην έννοια των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Πολλές από τις παραπάνω βασικές έννοιες τις θεωρούμε στα πλαίσια του Απειροστικού Λογισμού ως γνωστές και τις "καταλαβαίνουμε" διαισθητικά. Η αυστηρή εισαγωγή ή γενίκευση των ως άνω εννοιών αποτελεί το αντικείμενο άλλων μαθημάτων της Ανάλυσης (π.χ. Εισαγωγή στην Μαθηματική Ανάλυση, Τοπολογία, Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία Μέτρου) ή άλλων μαθηματικών πεδίων (π.χ. Γραμμική Άλγεβρα, Αλγεβρικές Δομές).

Στους ΑΛ Ι και ΙΙ ασχολούμαστε με συναρτήσεις και τα όριά τους στον $\mathbb{R}$ (μονοδιάστατη Ανάλυση).

11.1.14

Η ύλη που θα πρέπει να γίνει κατανοητή στον ΑΑ Ι είναι

- σύνολα και συναρτήσεις στον $\mathbb{R}$
- ιδιότητες του $\mathbb{R}$
- όρια ακολουθιών και σειρών στον $\mathbb{R}$
- όρια συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$
- συνέχεια συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$
- Παραγώγιση συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$

Κεφάλαιο 0 Προκαταρκτικά

§ 0.1 Σύνολα

A : <u>σύνολο</u> [" μια συλλογή καλώς ορισμένων (well-defined) (μαθηματικών) αντικειμένων ", των <u>στοιχείων</u> του]

$x \in A$: το στοιχείο x <u>ανήκει</u> στο (σύνολο) A

$x \notin A$: το x <u>δεν ανήκει</u> στο A

$\emptyset$: το <u>κενό σύνολο</u> [δεν περιέχει <u>κανένα</u> <u>στοιχείο</u>]

$A \subseteq B$: το (σύνολο) A είναι <u>υποσύνολο</u> του (συνόλου) B, δηλ.

$\forall x \in A$ $\overset{\text{"ισχύει"}}{:}$ $x \in B$

"για κάθε" (καθολικός ποσοδείκτης),

ή, ισοδύναμα, $x \in A \Rightarrow x \in B$

$A \subsetneq B$ (ή $A \subset B$) : το A είναι <u>γνήσιο υποσύνολο</u> του B, δηλ.

$A \subseteq B$ $\underset{\text{"και"}}{\wedge}$

$\exists x \in B : x \notin A$,

"υπάρχει" (υπαρξιακός ποσοδείκτης)

$A = B \;\underbrace{:\Longleftrightarrow}_{\text{"ισοδυναμεί"}}\; A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq A$:

"ορίζεται ως ισοδύναμο του"

τα σύνολα A και B είναι <u>ίσα</u>

$A \cup B$: <u>ένωση</u> των συνόλων A και B, δηλ.

$x \in A \cup B \;:\Longleftrightarrow\; x \in A \;\overset{\text{"ή"}}{\vee}\; x \in B$,

ή, ισοδύναμα, $A \cup B \underbrace{:=}_{\text{"ορίζεται ως ίσο του"}} \{ x : x \in A \vee x \in B \}$

$A \cap B$: <u>τομή</u> των συνόλων A και B, δηλ.

$x \in A \cap B \;:\Longleftrightarrow\; x \in A \;\wedge\; x \in B$, ή, ισοδύναμα, $A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

$A \cap B = \emptyset$: τα A και B είναι ξένα μεταξύ τους

$A \setminus B$: το συμπλήρωμα του B (ως προς το A),

δηλ.: $x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B$,

ή, ισοδύναμα, $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$

[εναλλ. γραφή: $A - B$ (την οποία δεν χρησιμοποιούμε εδώ για το συμπλήρωμα, γιατί με αυτήν θα συμβολίσουμε κάτι διαφορετικό)]

Παραδείγματα:

Τα σύνολα πάνω στα οποία στηρίζεται όλη η Ανάλυση:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: οι <u>φυσικοί αριθμοί</u>

[Προσοχή: Το <u>μηδέν</u> 0 δεν είναι φυσικός αριθμός!]

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$:

οι <u>ακέραιοι αριθμοί</u>,

$\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p, q\ \overbrace{\text{δεν έχουν κοινό διαιρέτη}}^{\Leftrightarrow \nexists m \in \mathbb{N},\ m \geq 2 :\ p = mk,\ q = mn,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}}\ \text{(διάφορο του 1)}\}$

1.1/10

<u>ρητοί αριθμοί</u>,

$\mathbb{R}$: <u>πραγματικοί αριθμοί</u> (ορισμός στο επόμενο μάθημα 10.11.)

Ισχύει: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

§ 0.2 Συναρτήσεις

11.1.11

Ορισμός: Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Ονομάζουμε συνάρτηση $f: A \to B$ ή $f: A \ni x \longmapsto f(x) \in B$, έναν κανόνα (νόμο, διαδικασία) που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο $x \in A$ ένα και μόνο ένα στοιχείο $f(x) \in B$

Το $f(x) \in B$ ονομάζεται τιμή ή εικόνα του $x \in A$ υπό την (ή μέσω της) f, το x ονομάζεται πρότυπο του $y = f(x)$.

Το A ονομάζεται πεδίο ορισμού της f και γράφεται $D(f)$ (domain of f).

1.1/12

Στο βιβλίο του κ. Ντούγια το σύνολο των τιμών $f(x) \in B$ των στοιχείων $x \in A$ ονομάζεται πεδίο τιμών της f και γράφεται $R(f)$ (range of f),

δηλ.
$$R(f) := \{ y \in B : \exists\, x \in A : f(x) = y \}$$
$$= \{ f(x) : x \in A \}$$

[Προσοχή: Συνήθως για μια συνάρτηση $f : A \to B$ το B ονομάζεται πεδίο τιμών της f (και γράφεται $R(f)$) και το $f(A) := \{ f(x) : x \in A \} \subseteq B$ ονομάζεται εικόνα του A υπό την f ή εικόνα της f ή σύνολο τιμών της f.]

1.1/13

Ακολουθούμε εδώ την ονοματολογία και τον συμβολισμό του βιβλίου του κ. Ντούγια.

Μιά συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται

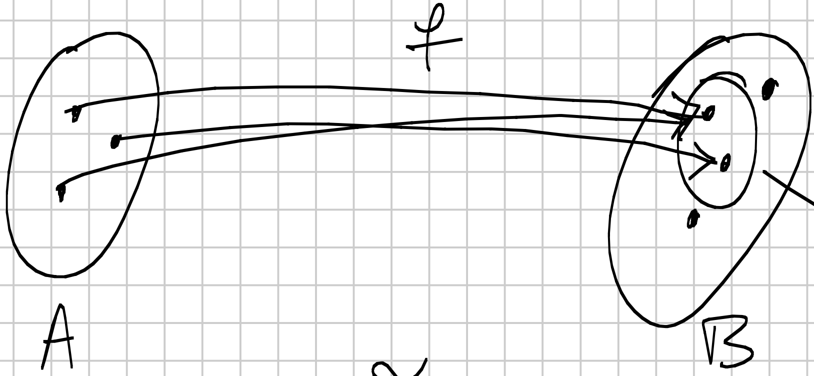
επί $:\Longleftrightarrow \quad R(f) \; \big(\underset{\text{Nτ.}}{=} f(A) \big) = B$

αμφιμονοσήμαντη ή $1-1$ (ένα προς ένα)

$\big[:\Longleftrightarrow \forall \; x_1, x_2 \in A \; (= D(f)), \; x_1 \neq x_2 \; : \; f(x_1) \neq f(x_2) \big]$

$:\Longleftrightarrow \quad \forall \; x_1, x_2 \in A \; : \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

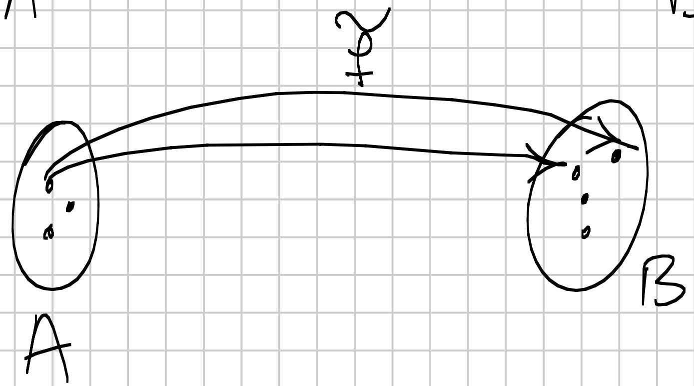
$\Longleftrightarrow \quad \forall \; x_1, x_2 \in A \; : \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$



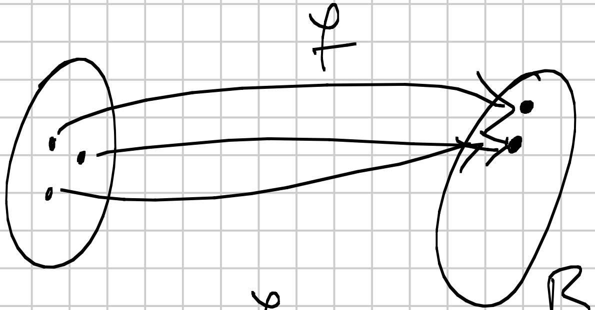
η f είναι συνάρτηση

$f(A)$ $(= R(f))$

(ούτε 1-1 ούτε επί)

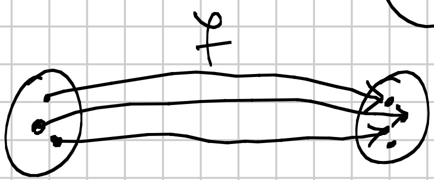


η $\tilde{f}$ δεν είναι συνάρτηση



η f είναι συνάρτηση <u>επί</u>

$B = f(A)$



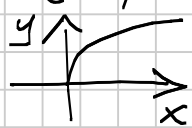
η f είναι συν. 1-1 (αλλά <u>όχι</u> <u>επί</u>)

1.1/15

Παράδειγμα 0.1 [Ντούγιας: 0.2 α)]:

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}\,, \quad D(f)\subseteq \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f: D(f)\to \mathbb{R}$$

Ξέρουμε: Η τετραγωνική ρίζα ενός πραγματικού αριθμού ορίζεται όταν αυτός είναι ≥ 0, και είναι μη αρνητική.



$\Rightarrow$ το μέγιστο $D(f)$ ορίζεται ως

$$D(f)=\{x\in\mathbb{R} : \underbrace{x^2-4x+3}\geq 0\}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2-4x+4-4+3\\
&= x^2-4x+4-1\\
&= (x-2)^2-1\\
&= (x-2-1)(x-2+1)\\
&= (x-3)(x-1)
\end{aligned}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} : (x-3)(x-1) \geq 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} : (x \geq 3 \wedge x \geq 1) \vee (x \leq 3 \wedge x \leq 1) \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \vee x \leq 1 \}$$

$$= \underbrace{\{ x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \}}_{=: [3, \infty)} \cup \underbrace{\{ x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \}}_{=: (-\infty, 1]}$$

$$R(f) := \{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in D(f) : y = \underbrace{f(x)}_{= \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 0} \}$$

$$= \{ y \geq 0 : \exists x \in D(f) : y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} \}$$

$$= \{ y \geq 0 : \exists x \in D(f) : y^2 = x^2 - 4x + 3 \}$$

1.1/17

$$\left[\ y=\sqrt{x^2-4x+3} \underset{y\geq 0}{\iff} y^2 = x^2-4x+3\ \right]$$

$$= \{\, y \geq 0 : \exists\, x\in\mathbb{R} : \underbrace{y^2 = x^2-4x+3}_{\iff x^2-4x+3-y^2=0} \}$$

$$= \{\, y\geq 0 : \underbrace{16-4(3-y^2)\geq 0}_{\iff 4-3+y^2 \geq 0 \iff y^2 \geq -1} \} = [0,\infty)$$

[Η $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, έχει τις <u>πραγματικές</u> λύσεις (ρίζες)

$$x_{1,2} = \frac{-\beta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$ όταν και μόνο όταν η διακρίνουσα

$$\Delta := \beta^2-4\alpha\gamma \geq 0\ ]$$

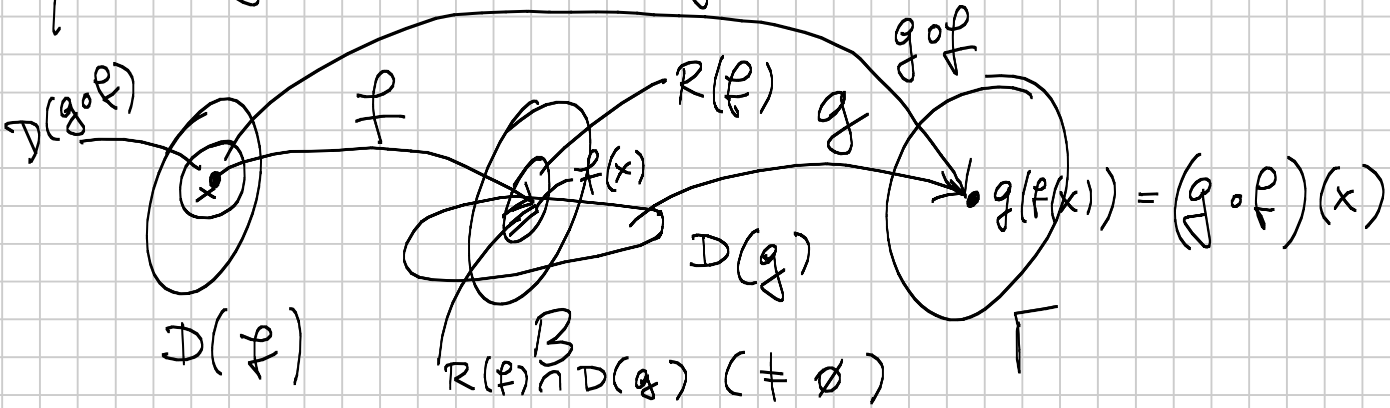
1.1/18

Έστω δύο συναρτήσεις $f : D(f) \to B$ και $g : D(g) \to \Gamma$

Αν $R(f) \cap D(g) \neq \emptyset$, ορίζεται ως σύνθεση $g \circ f$

η συνάρτηση $$g\circ f : \underbrace{\{ x \in D(f) : \underbrace{f(x)}_{\in R(f)} \in D(g) \}}_{= D(g\circ f) \ (\subseteq D(f))} \to \Gamma$$

με $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall\, x \in D(g\circ f)$



1.1/19

Παράδειγμα 0.2 [Nz.: 0.3]:

$$f(x)=\sqrt{2-x}\ ,\quad D(f)=\{x\in\mathbb{R}:\ \underbrace{2-x\geq 0}_{\Leftrightarrow\ x\leq 2}\}=(-\infty,2]$$

$$R(f)=\{y\in\mathbb{R}:\ \exists\ x\in(-\infty,2]:\ y=\sqrt{2-x}\}$$

$$=\{y\geq 0:\ \exists\ x\in(-\infty,2]:\ y=\sqrt{2-x}\}$$

$$=\{y\geq 0:\ \exists\ x\in(-\infty,2]:\ y^2=2-x\}$$

$$=\{y\geq 0:\ \exists\ \underset{(=2-y^2)}{x}\in\mathbb{R}:\ y^2=2-x\}=[0,\infty)$$

Ανάλογα: $g(x)=\sqrt{1-x}\ ,\ D(g)=(-\infty,1]\ ,\ R(g)=[0,\infty)$

$$\Rightarrow\ R(f)\cap D(g)=[0,\infty)\cap(-\infty,1]=[0,1]$$

$$[=\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq 0\ \wedge\ x\leq 1\}=\{x\in\mathbb{R}:\ 0\leq x\leq 1\}]$$

1.1/20

Άρα, η σύνθεση $g\circ f : D(g\circ f) \to \mathbb{R}$ ορίζεται

με $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1-f(x)} = \sqrt{1-\sqrt{2-x}}$

$$\forall\, x \in D(g\circ f) = \{x\in D(f) : f(x)\in D(g)\}$$

$$= \{x \in (-\infty, 2] : \underbrace{\underbrace{\sqrt{\underbrace{2-x}_{\geq 0}}}_{\geq 0} \leq 1}_{\Leftrightarrow\ 2-x \leq 1 \ \Leftrightarrow\ x\geq 1}\}$$

$$= \{x\in(-\infty,2] : x \geq 1\}$$

$$= [1,2]$$

$$\left[\underbrace{x \leq y \underset{x\geq 0}{\Longleftrightarrow} x^2 \leq y^2}\right]$$

$$\Longleftrightarrow\ y-x\geq 0 \underset{x\geq 0}{\Longleftrightarrow} \underbrace{y^2-x^2 \geq 0}_{\Leftrightarrow (y-x)(y+x) \geq 0}$$

1.1/21

Εργασία για το σπίτι: 1. Να προσδιορίσετε την $f \circ g$ (δηλ. να δείτε αν ορίζεται και αν ναι, να βρείτε το $D(f\circ g)$ και το $f(g(x))$)

2. Να δείξετε ότι $g \circ f \neq f \circ g$ [$\Leftrightarrow D(g\circ f) \neq D(f \circ g) \underset{\text{"είτε"}}{\vee}$

$\underset{\text{"είτε"}}{\vee} \exists x \in D(g\circ f) = D(f\circ g) : (g\circ f)(x) \neq (f\circ g)(x)$]

[είτε ... είτε ... : διαζευκτικό ή]

3. Να εξετάσετε αν ορίζονται οι $f\circ f$ και $g \circ g$.

Λύση: 1. Έχουμε $f(x) = \sqrt{2-x}$, $D(f) = (-\infty, 2]$, $R(f) = [0, \infty)$,

$g(x) = \sqrt{1-x}$, $D(g) = (-\infty, 1]$, $R(g) = [0,\infty)$.

$\Rightarrow \quad R(g) \cap D(f) = [0,2] \neq \emptyset \quad \Rightarrow$

1.1/22

$\Rightarrow$ Η $f\circ g : D(f\circ g) = \{ x \in D(g) : g(x) \in D(f) \} \to \mathbb{R}$

ορίζεται ως $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2 - \sqrt{1-x}}$ και είναι

$$D(f\circ g) = \{ x \in (-\infty, 1] : \sqrt{1-x} \in (-\infty, 2] \}$$
$$= \{ x \in (-\infty, 1] : \sqrt{1-x} \in [0, 2] \}$$
$$= \{ x \in (-\infty, 1] : 1-x \in [0, 4] \}$$
$$= \{ x \in (-\infty, 1] : -x \in [-1, 3] \}$$
$$= \{ x \in (-\infty, 1] : x \in [-3, 1] \}$$
$$= [-3, 1]$$

2. $f\circ g \neq g\circ f$ αφού $D(f\circ g) \neq D(g\circ f)$

(και π.χ. για $x = 1$: $(f\circ g)(1) = \sqrt{2} \neq 0 = (g\circ f)(1)$)

3. Για να ορίζονται οι $f\circ f$ και $g\circ g$ θα πρέπει

$R(f) \cap D(f) \neq \emptyset$ και $R(g) \cap D(g) \neq \emptyset$ αντιστοίχα.

Έχουμε $R(f) \cap D(f) = [0,2] \neq \emptyset$ και $R(g) \cap D(g) = [0,1] \neq \emptyset$.

Συνεπώς, ορίζονται οι $f \circ f : D(f \circ f) \to \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2-x}}$

και $g \circ g : D(g \circ g) \to \mathbb{R}$ με $(g \circ g)(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x}}$, όπου

$$D(f \circ f) = \{ x \in D(f) : f(x) \in D(f) \} = \{ x \in (-\infty, 2] : \sqrt{2-x} \in (-\infty, 2] \}$$

$$= \{ x \in (-\infty, 2] : x \in [-2, 2] \} = [-2, 2]$$ και

$$D(g \circ g) = \{ x \in D(g) : g(x) \in D(g) \} = \{ x \in (-\infty, 1] : \sqrt{1-x} \in (-\infty, 1] \}$$

$$= \{ x \in (-\infty, 1] : x \in [0, 1] \} = [0, 1]$$

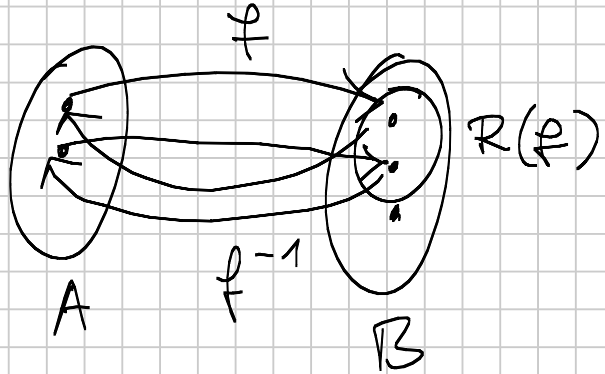
<u>Αν η συνάρτηση $f: A \to B$ είναι 1–1</u>, τότε

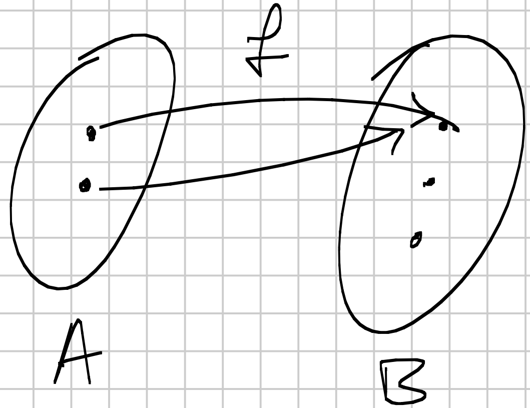
ορίζεται <u>η αντίστροφη συνάρτηση της f</u> $\quad f^{-1}: R(f) \to A$

μέσω του κανόνα $\quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A \quad (1)$

ή, ισοδύναμα, $f^{-1}: R(f) \ni f(x) \mapsto x \in A$

$$\boxed{\text{Η } f^{-1}: R(f) \to A \text{ είναι συνάρτηση, 1–1 και επί και ισχύει η (1) και η } f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in R(f).} \quad (*)$$





η f^{-1} δεν υπάρχει (δεν είναι συνάρτηση)

11.1.25

(*) Η $f^{-1} : R(f) \to A = D(f)$ είναι

• <u>συνάρτηση</u>, γιατί $\forall\, y \in R(f)\ \underbrace{\exists!}_{\text{"υπάρχει μοναδικό"}}\ x \in D(f) : y = f(x)$

[αφού η f είναι 1-1].

Άρα $\forall\, y \in R(f)\ \exists!\ f^{-1}(y)\ (= x)$

• <u>επί</u>, γιατί $\forall\, x \in A\ \exists\ f(x) \in R(f)$, άρα

$$A \subseteq R(f^{-1}) = \{x \in A : \exists\, \underset{(=f(x))}{y} \in R(f) : f^{-1}(y) = x\} \subseteq A$$

δηλ. $R(f^{-1}) = A$

• <u>1-1</u>, γιατί $\forall\, x \in A : f^{-1}(f(x)) = x$

$\Longrightarrow$ f συνάρτηση $\quad f\left(f^{-1}\left(\underbrace{f(x)}_{=y}\right)\right) = \underbrace{f(x)}_{=y} \quad \forall\, y \in R(f)$

Συνεπώς

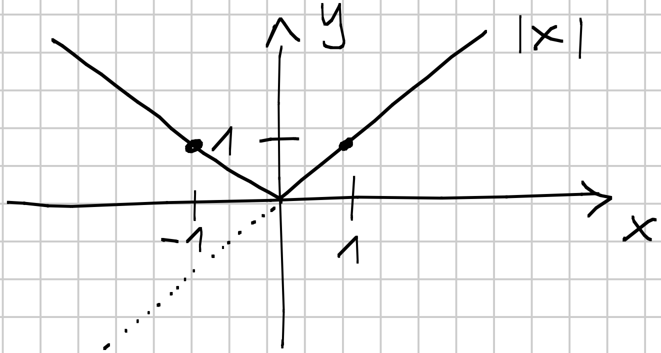
$\forall\, y_1, y_2 \in R(f): \quad f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \Longrightarrow$ f συνάρτηση

$$\underbrace{f\left(f^{-1}(y_1)\right)}_{=y_1} = \underbrace{f\left(f^{-1}(y_2)\right)}_{=y_2}$$

Παράδειγμα 0.3 [Nz., 0.5]

Ορισμός: Η απόλυτη τιμή $|x|$ για $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται ως η συνάρτηση
$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

[$\Rightarrow |x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$:



] με $D(|\cdot|) = \mathbb{R}$, $R(|\cdot|) = [0, \infty)$

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad D(f) = \mathbb{R}$$ γιατί $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow 1 + |x| \geq 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Η f είναι αμφιμονοσήμαντη (1−1), γιατί $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|} \overset{(1)}{\underset{x_2 \neq 0}{\Leftrightarrow}} \frac{x_1}{x_2} = \frac{1+|x_1|}{1+|x_2|} > 0$$

Άρα, τα x_1 και x_2 $(x_2 \neq 0)$ είναι ομόσημα και από την (1)

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + x_1 \underbrace{|x_2|}_{= \pm x_2} = x_2 + \underbrace{|x_1|}_{= \pm x_1} x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

(το ίδιο πρόσημο και για τα δύο)

Για $x_2 = 0$ έχουμε από την (1) $x_1 = 0$.

$$R(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R} : y = \frac{x}{1+|x|} \right\}$$

$$= \left\{ y \geq 0 : \exists\, x \in \cancel{\mathbb{R}}\,[0,\infty) : y = \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{1+x} \right\} \cup \left\{ y < 0 : \exists\, x \in \cancel{\mathbb{R}}\,(-\infty,0) : y = \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{1-x} \right\}$$

$$= \{ y \geq 0 : \exists x \geq 0 : \underbrace{y = \frac{x}{1+x}}_{} = f(x) \} \cup \{ y < 0 : \exists x < 0 : \underbrace{y = \frac{x}{1-x}}_{} \}$$

$\Leftrightarrow y + yx = x$

$\Leftrightarrow y = x(1-y)$

$\Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{y}{1-y} \geq 0}$ "πρέπει να είναι"

$\parallel$

$f^{-1}(y) \underset{y \geq 0}{\Leftrightarrow} 1 - y > 0 \Leftrightarrow y < 1$

$\Leftrightarrow y = x(1+y)$

$\Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y} < 0$

$\underset{y<0}{\Leftrightarrow} 1+y>0$

$\Leftrightarrow y > -1$

$[\, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \,]$

$= [0,1) \cup (-1,0)$

$= (-1, 1)$

$\Rightarrow \quad f^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ με

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{1-y} & \text{για } y \in [0,1) \\ \dfrac{y}{1+y} & \text{για } y \in (-1,0) \end{cases}$$

<u>Εργασία για το σπίτι</u>: Βρείτε τα $D(f)$ και $R(f)$ της $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

Λύση:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}} \qquad D(f)=\Big\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 1,\ \underbrace{\frac{x}{x-1}\geq 0}_{\underset{x\neq 1}{\Leftrightarrow}\ x(x-1)\geq 0\ \Leftrightarrow\ (x\geq 0\ \wedge\ x>1)\ \vee\ (x\leq 0\ \wedge\ x<1)}\Big\}=$$

$$=(-\infty,0]\cup(1,\infty)$$

$$R(f)=\Big\{y\in\mathbb{R}:\exists\, x\in D(f):\ y=\underbrace{f(x)}_{=\sqrt{\frac{x}{x-1}}}\Big\}=\Big\{y\geq 0:\ \exists\, x\in D(f)\ y=\sqrt{\frac{x}{x-1}}\Big\}$$

$$=\Big\{y\geq 0:\ \exists\, x\in D(f):\ y^2=\frac{x}{x-1}\Big\}=\Big\{y\geq 0:\ \exists\, x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}:\ y^2=\frac{x}{x-1}\Big\}$$

$$y^2=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}\ \Leftrightarrow\ y^2-1=\frac{1}{x-1}\ \underset{y^2\neq 1}{\Leftrightarrow}\ x-1=\frac{1}{y^2-1}\ \Leftrightarrow\ x=\frac{y^2}{y^2-1}$$

$$\Rightarrow\quad R(f)=[0,1)\cup(1,\infty)$$

Για την απόλυτη τιμή $|x| := \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

α) $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$: $x \geq 0$: $|x| = x \geq 0$, $x < 0$: $|x| = -x > 0$

β) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$: $\Leftarrow$: εξ ορισμού $\Rightarrow$: Αν $x > 0$, τότε $|x| = x > 0$,
Αν $x < 0$, τότε $|x| = -x > 0$

γ) $|xy| = |x||y|$: $|xy| = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \vee |y| = 0$
$\Leftrightarrow |x||y| = 0$

$xy > 0$, $x, y > 0$: $|xy| = xy = |x||y|$
$x, y < 0$: $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$

$xy < 0 \Rightarrow$ χβτγ (:= χωρίς βλάβη της γενικότητας)
$x > 0$, $y < 0 \Rightarrow |xy| = -(xy) = x(-y) = |x||y|$

δ) $|x| = |-x|$: $|-x| = |-1||x| = 1|x| = |x|$

ε) $|x+y| \leq |x|+|y|$ (τριγωνική ανισότητα):

$x, y \geq 0$: $|x+y| = x+y = |x|+|y|$

$x, y < 0$: $|x+y| = -(x+y) = -x+(-y) = |x|+|y|$

$x \geq 0,\ y < 0$: $x+y \geq 0$: $|x+y| = x+y < x < x+|y| = |x|+|y|$

$x+y < 0$: $|x+y| = -x-y \leq -y \leq x-y = |x|+|y|$

στ) $||x|-|y|| \leq |x+y|$: $|x| = |x+y-y| \leq |x+y|+|y|$

$\Rightarrow |x|-|y| \leq |x+y| \quad (1)$

$|y| = |x+y-x| \leq |x+y|+|x|$

$\Rightarrow |y|-|x| \leq |x+y| \quad (2)$

Άρα : $|x|-|y| \geq 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} ||x|-|y|| \leq |x+y|$

$|x|-|y| < 0 \Rightarrow ||x|-|y|| = |y|-|x| \underset{(2)}{\leq} |x+y|$

ζ) $|x| \leq \alpha \ (\alpha \geq 0) \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$:

$\Leftarrow$: $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \leq \alpha$, $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \leq -(-\alpha) = \alpha$

$\Rightarrow$: $x \geq 0 \Rightarrow -\alpha \leq 0 \leq x = |x| \leq \alpha$

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \leq \alpha \Rightarrow -\alpha \leq x < 0 \leq \alpha$

η) $|x| \geq \alpha \quad (\alpha \geq 0) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, \infty)$

$\Leftarrow$: $x \geq \alpha \geq 0 \Rightarrow |x| = x \geq \alpha$, $x \leq -\alpha \leq 0 \Rightarrow |x| = -x \geq -(-\alpha) = \alpha$

$\Rightarrow$: $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \geq \alpha$, $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \geq \alpha \geq 0 \Rightarrow x \leq -\alpha$