Εβδομάδα 1η / Θεωρία / 10.11.11

Κεφ. 1 Πραγματικοί αριθμοί – ακολουθίες

Notiztitel 07.11.2011

§1.1 Αξιωματική θεμελίωση του $\mathbb{R}$

[Οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ αποτελούνται από τους ρητούς $\mathbb{Q}$ και τους άρρητους $\mathbb{I}$, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$. Οι άρρητοι μπορούν να κατασκευαστούν ως "όρια ακολουθιών ρητών" (κατασκευαστική θεμελίωση του $\mathbb{R}$). Εδώ θα δώσουμε την αξιωματική θεμ.]

Μπορεί να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένα μοναδικό ("μέχρι ισομορφίας που διατηρεί την διάταξη") μη κενό σύνολο το οποίο πληροί τα παρακάτω αξιώματα. Το σύνολο αυτό ονομάζεται σύνολο των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}$.

I. Αξιώματα σώματος : Το $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ είναι σώμα,

δηλ. ένα σύνολο στο οποίο ορίζονται δυο πράξεις, η πρόσθεση + και ο πολλαπλασιασμός •, που εκπληρούν τα αξιώματα :

0) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x+y \in \mathbb{R}$, $xy \in \mathbb{R}$ (κλειστότητα)

1) — " — : $x+y = y+x$, $xy = yx$ (αντιμεταθετικότητα)

2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $(x+y)+z = x+(y+z)$, $(xy)z = x(yz)$ (προσεταιρ.)

3) — " — : $x(y+z) = xy + xz$ (επιμεριστικότητα)

4) α) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$: $x + 0 = x$ (ύπαρξη ουδέτ. ως προς +)

β) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists -x \in \mathbb{R}$: $x + (-x) = 0$ (— " — αντίθετου)

5) α) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$: $1x = x$ (ύπ. ουδ. ως προς •)

β) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $\exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$: $x \frac{1}{x} = 1$ (ύπ. αντίστροφου)

Παρατηρήσεις : α) για $x+(-y)$ γράφουμε $x-y$

$x \cdot \frac{1}{y}$ $\qquad$ $\frac{x}{y}$

$x+x$, $x+x+x$, … $\qquad$ $2x$, $3x$, …

$x \cdot x$, $x \cdot x \cdot x$, … $\qquad$ x^2, x^3, …

β) και το $\mathbb{Q}$ (με την συνήθη έννοια των $+, \cdot$) είναι σώμα

γ) Από τα αξιώματα σώματος ακολουθούν όλοι οι γνωστοί κανόνες των πράξεων

[π.χ. $x+y = x+z \Rightarrow y=z$, $-(-x)=x$,
για $x \neq 0$: $xy = xz \Rightarrow y=z$, $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$
$0x=0$, $x,y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$, $(-x)y = -(xy) = x(-y)$]

II. Αξιώματα διάταξης : Το $(\mathbb{R},+,\cdot)$ είναι ένα διατεταγμένο σώμα,

δηλ. ένα σώμα στο οποίο ορίζεται μια σχέση $<$ (μεταξύ των στοιχείων του) που εκπληρούν τα αξιώματα:

6) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad \vee \; x < y \quad \vee \; x = y \quad \vee \; x > y$
(νόμος της τριχοτομίας)

7) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x < y \; : \quad x + z < y + z$ (νόμος της διατήρησης)

8) $\forall \; x > 0, \; y > 0 \; : \quad xy > 0$

9) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad x < y \wedge y < z \implies x < z$
(μεταβατική ιδ.)

Παρατηρήσεις:

α) τα $x \in \mathbb{R}$ με $x>0$ ονομ. θετικά

$x<0$ αρνητικά

β) $x \le y \;:\iff\; \vee\, x<y \;\vee\; x=y$

γ) και το $\mathbb{Q}$ είναι διατεταγμένο σώμα

δ) όλοι οι γνωστοί κανόνες ανισοτήτων ακολουθούν από τα αξιώματα σώματος και διάταξης

[Π.χ. $x>0 \overset{(*)}{\Rightarrow} -x<0$, $\quad x>0,\ y<z \Rightarrow xy<xz$,

$x \neq 0 \Rightarrow x^2>0$ (και άρα $1>0$), $\quad 0<x<y \Rightarrow 0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$]

$(*)$: $x>0 \underset{7)}{\Longrightarrow} x+(-x) > (-x) \iff 0 > -x$

III. Αξίωμα πληρότητας : Το $(\mathbb{R},+,\cdot)$ είναι πλήρες.

Προκαταρκτικά:

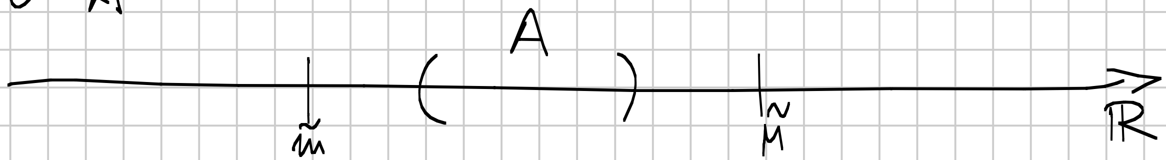
Ορισμός 1.1: Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται

άνω φραγμένο $:\Longleftrightarrow \exists\, \tilde{M} \in \mathbb{R} : x \leq \tilde{M} \quad \forall x \in A$

κάτω φραγμένο $:\Longleftrightarrow \exists\, \tilde{m} \in \mathbb{R} : \tilde{m} \leq x \quad \forall x \in A$

φραγμένο $:\Longleftrightarrow$ το A είναι άνω και κάτω φραγμένο

Ο $\tilde{M}$ λέγεται **άνω φράγμα του A**, ο $\tilde{m}$ **κάτω φράγμα** του A.



Ορισμός 1.2: Το $M \in \mathbb{R}$ λέγεται ελάχιστο άνω φράγμα ή **supremum** ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ και συμβολίζεται με $\sup A$,

$:\Longleftrightarrow$ (αν και μόνο αν)
- α) M είναι άνω φράγμα του A
- β) $\forall$ άνω φράγμα $\tilde{M}$ του A : $\tilde{M} \geq M$

Το $m \in \mathbb{R}$ λέγεται μέγιστο κάτω φράγμα ή **infimum** ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ και συμβολίζεται με $\inf A$

$:\Longleftrightarrow$
- α) το m είναι κάτω φράγμα του A
- β) $\forall$ κάτω φράγμα $\tilde{m}$ του A : $\tilde{m} \leq m$

Παρατηρήσεις:

α) <u>Θεώρημα</u> [1.9]: Τα $\sup A$ και $\inf A$, αν υπάρχουν, είναι μοναδικά.

<u>Απόδειξη</u> (για $\sup A$): Έστω ότι M_1, M_2 είναι suprema

$\Rightarrow$ M_1 και M_2 είναι άνω φράγματα του A.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αφού } M_1 \text{ είναι supremum} \Rightarrow M_1 \leq M_2 \\ \text{Αφού } M_2 \text{ είναι supremum} \Rightarrow M_2 \leq M_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow M_1 = M_2 \qquad \square$$

β) [Παρ. 1.3] Αν $\sup A \in A$, τότε αυτό λέγεται <u>μέγιστο του A</u>, $\max A$, και αν $\inf A \in A$, τότε αυτό λέγεται <u>ελάχιστο του A</u>, $\min A$.

γ) Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο θέτουμε $\sup A$ "=" ∞ $[\infty \notin \mathbb{R}]$
κάτω $\inf A$ "=" $-\infty$.

Επίσης θέτουμε: $\sup \emptyset$ "=" $-\infty$, $\inf A$ "=" ∞.

δ) <u>Εφαρμογή</u>: [Για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ συμβολίζουμε

$(\alpha, \beta) := \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\}$, $(\alpha, \beta] := \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x \leq \beta\}$,

$[\alpha, \beta) := \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x < \beta\}$, $[\alpha, \beta] := \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq \beta\}$,

$(-\infty, \beta) := \{x \in \mathbb{R} : x < \beta\}$, $(-\infty, \beta] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq \beta\}$,

$(\alpha, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > \alpha\}$, $[\alpha, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq \alpha\}$,

$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$]

Έστω B κάποιο από τα διαστήματα (α, β), $[\alpha, \beta)$, $(-\infty, \beta)$ ή $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta]$, $(-\infty, \beta]$, όπου $\alpha < \beta$.

Τότε $\sup B = \beta$ και στις τρείς τελευταίες περιπτώσεις $\sup B = \beta = \max B$.

Απόδειξη: Και στις έξι περιπτώσεις $x \le \beta$ $\forall x \in B$, δηλ. το β είναι άνω φράγμα του B.

Έστω ότι $\beta \neq \sup A$, δηλ. $\exists\, \varphi < \beta$: $\forall x \in B : x \le \varphi$.

Αλλά τότε $\frac{\varphi+\beta}{2} = \frac{\varphi}{2} + \frac{\beta}{2} < \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta$,

και για τις τρεις πρώτες περιπτ. και $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} \in B$

και άρα $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} \le \varphi < \frac{\varphi+\beta}{2}$, και συνεπώς $\frac{\varphi+\beta}{2} \in B$

$\Rightarrow \frac{\varphi+\beta}{2} \le \varphi \Rightarrow \beta \le \varphi$ ↯ στο $\beta > \varphi$. $\blacksquare$

[Ανάλογα: Έστω A κάποιο από τα διαστήματα (α,β), $(\alpha,\beta]$, (α,∞) ή $[\alpha,\beta)$, $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\infty)$. Τότε $\inf A = \alpha$ και στις τρεις τελευταίες περιπτώσεις $\inf A = \alpha = \min A$.]

1.2.11

ε) Ένας χαρακτηρισμός του $\sup A$ ισοδύναμος του ορισμού δίνεται από το

Θεώρημα [1.10]: $M=\sup A \iff \begin{cases} \alpha)\ x\le M\ \forall x\in A \\ \beta)\ \forall \varepsilon>0\ \exists x\in A:\ M-\varepsilon<x \end{cases}$

Απόδειξη: $\Rightarrow$: $M=\sup A \underset{Ορ.\,1.2}{\Rightarrow}$ M είναι άνω φράγμα $\underset{Ορ.\,1.1}{\Rightarrow}$ α)

Έστω ότι δεν ισχύει η β), δηλ. $\exists\, \varepsilon>0\ \forall x\in A:\ M-\varepsilon\ge x$.

Τότε το $M-\varepsilon$ είναι ένα άνω φράγμα $<M$. $\Rightarrow M\neq \sup A$ ↯.

$\Leftarrow$: Έστω ότι πληρούνται οι α) και β). Τότε από την α) το M είναι άνω φράγμα. Αν $M\neq\sup A$, τότε υπάρχει άνω φράγμα $M_0<M$, δηλ. $x\le M_0\ \forall x\in A$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί κατά την β) για $\varepsilon:=M-M_0>0\ \exists\, x\in A:\ M-(M-M_0)=M_0<x$.

$\square$

Ανάλογα αποδεικνύεται και το

Θεώρημα [1.11]: $m=\inf A \iff \begin{cases} \alpha)\ x\ge m\ \forall x\in A \\ \beta)\ \forall\varepsilon>0\ \exists x\in A:\ x<m+\varepsilon \end{cases}$

στ) Εφαρμογή: (1.2/12)

Θεώρημα [1.13]: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda A := \{\lambda x \in \mathbb{R} : x \in A\}$ $\left(= f(A) \text{ με } f(x) = \lambda x\right)$. Τότε

i) $\lambda \sup A = \begin{cases} \sup(\lambda A) & \text{για } \lambda \geq 0 \\ \inf(\lambda A) & \text{για } \lambda \leq 0 \end{cases}$

ii) $\lambda \inf A = \begin{cases} \inf(\lambda A) & \text{για } \lambda \geq 0 \\ \sup(\lambda A) & \text{για } \lambda \leq 0 \end{cases}$

Απόδειξη: $\underline{\lambda = 0}$: $0 \cdot A = \{0\} \Rightarrow \sup(0 \cdot A) = 0$, $\inf(0 \cdot A) = 0$

$\lambda \neq 0$: i) Έστω $M = \sup A$. $\underline{\lambda > 0}$: Τότε (Θ. [1.10]) $\forall x \in A : x \leq M$ και $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_1 \in A : x_1 > M - \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Απ' την άλλη $\forall x' \in \lambda A \; \exists x'' \in A$: $x' = \lambda x'' \leq \lambda M$ και για το $x_1' := \lambda x_1 \in A$ ισχύει $x_1' > \lambda M - \varepsilon$.

Άρα $\sup(\lambda A) = \lambda M$ για $\lambda > 0$.

<u>$\lambda < 0$:</u> $\forall x \in A : x \leq M \Rightarrow \forall x' \in \lambda A \ \exists x'' \in A : x' = \lambda x'' \underset{(\lambda<0)}{\geq} \lambda M$,

δηλ. το λM είναι κάτω φράγμα του λA.

Έστω m τυχαίο κάτω φράγμα του $\lambda A \Rightarrow m \leq \lambda x \ \forall x \in A$

$\Rightarrow x \underset{(\lambda<0)}{\leq} \frac{m}{\lambda} \ \forall x \in A \Rightarrow \frac{m}{\lambda}$ άνω φράγμα του $A \Rightarrow \frac{m}{\lambda} \geq M$

$\Rightarrow m \underset{(\lambda<0)}{\leq} \lambda M$, άρα $\lambda M = \inf(\lambda A)$ για $\lambda < 0$.

ii) Αφού το $-A$ είναι μη κενό και φραγμένο $[m \leq x \leq M \ \forall x \in A \Rightarrow -m \geq -x \geq -M \ \forall x \in A]$
και $A = -(-A)$ $[A \ni x = -(-x) \in -(-A)]$ έχουμε από την i)

$\inf A = \inf(-(-A)) = -\sup(-A)$ και άρα

$$\lambda \inf A = -\lambda \sup(-A) = \begin{cases} \sup((-\lambda)(-A)), & \lambda < 0 \\ \inf((-\lambda)(-A)), & \lambda > 0 \end{cases} = \begin{cases} \sup(\lambda A), & \lambda < 0 \\ \inf(\lambda A), & \lambda > 0 \end{cases}$$

$\square$

Αξίωμα Πληρότητας (ή αξίωμα του ελαχίστου άνω φράγματος)

Κάθε μη κενό υποσύνολο πραγματικών αριθμών που είναι άνω φραγμένο έχει ελάχιστο άνω φράγμα ($\in \mathbb{R}$).

Παρατηρήσεις: α) Από το αξίωμα πληρ. συνάγεται και ότι:

Κάθε μη κενό υποσύνολο πραγματικών αριθμών που είναι κάτω φραγμένο έχει μέγιστο κάτω φράγμα. (Ασκ. [1.3])

Απόδειξη: Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και $\forall x \in A: x \geq m \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \emptyset \neq -A \subseteq \mathbb{R}$ και $\forall x \in A: -x \leq -m \in \mathbb{R}$

$\underset{\text{Αξίωμα Πληρότητας}}{\Rightarrow} \exists M \in \mathbb{R}: M = \sup(-A) \underset{\text{Θ.[1.13]}}{=} -\inf A \Rightarrow \exists -M \in \mathbb{R}: \inf A = -M$ $\square$

β) Πολλές "προφανείς" ιδιότητες των πραγματικών αριθμών αποδεικνύονται με την βοήθεια του αξιώματος πληρότητας.

Μια βασική είναι η Αρχιμήδεια Ιδιότητα : $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists \nu \in \mathbb{N} : \nu > x$.

Απόδειξη : Έστω ότι αυτό δεν ισχύει, δηλ. $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall \nu \in \mathbb{N} : \nu \leq x$, δηλαδή το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο $\underset{\text{Αξ. πληρ.}}{\Longrightarrow} \exists\ \alpha := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.

Αλλά, αν $\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu + 1 \in \mathbb{N}$ [μαζί με το ότι $1 \in \mathbb{N}$, αυτός είναι ο ορισμός του $\mathbb{N}$] $\Longrightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} : \nu + 1 \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} : \nu + 1 \leq \alpha \iff \forall \nu \in \mathbb{N} : \nu \leq \alpha - 1 < \alpha$ ↯. ∎

Το Αξίωμα Πληρότητας είναι η ειδοποιός διαφορά μεταξύ του $\mathbb{R}$ και του $\mathbb{Q}$ που είναι και τα δύο διατεταγμένα σύνολα.
Το $\mathbb{R}$ είναι (το μοναδικό) πλήρες διατεταγμένο σώμα.
Στο $\mathbb{Q}$ το Αξίωμα Πληρότητας δεν ισχύει, δηλ.

Θεώρημα [1.8]: Το σύνολο των ρητών αριθμών δεν είναι πλήρες, δηλ. υπάρχουν άνω φραγμένα μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{Q}$ χωρίς supremum στο $\mathbb{Q}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $S = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 < 2\}$.

Έχουμε: α) $S \neq \emptyset$, γιατί $1 \in S$ $[1 \in \mathbb{Q},\ 1 > 0,\ 1^2 = 1 < 2]$

β) το S είναι άνω φραγμένο, γιατί $\forall x \in S: x < 2$

[Απόδ. δια της απαγωγής εις άτοπον: Έστω $x \in S$ με $x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x^2 \not< 2 \Rightarrow x \notin S$ ↯]

Έστω ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{Q}$ με $\mu = \sup S$.

$\Rightarrow \mu \geq 1 > 0 \Rightarrow y := \dfrac{4+3\mu}{3+2\mu} > 0$.

$$\Rightarrow \quad \mu - y = \frac{2(\mu^2-2)}{3+2\mu} \quad , \quad 2 - y^2 = \ldots = \frac{2-\mu^2}{(3+2\mu)^2}$$

Σύμφωνα με τον νόμο της τριχοτομίας (Αξ. 6γ) ισχύει:

$\vee\ \mu^2 < 2 \quad \vee\ \mu^2 > 2 \quad \vee\ \mu^2 = 2$.

Έστω $\mu^2 < 2$. Τότε $\mu - y < 0$ και $2 - y^2 > 0$, δηλ.

$\mu < y$ και $y \in S$ $\underbrace{\lightning}_{\text{"άτοπο"}}$ [γιατί τότε το μ δεν είναι άνω φράγμα του S]

Έστω $\mu^2 > 2$. Τότε $\mu - y > 0$ και $2 - y^2 < 0$, δηλ.

$\mu > y$, και $y^2 > 2 > x^2 \ \forall x \in S \underset{(*)}{\Longrightarrow} y > x \ \forall x \in S$ $\lightning$

[γιατί τότε υπάρχει άνω φράγμα του S (το y) μικρότερο του μ]

$$[(*):\ y^2 > x^2 \iff y^2 - x^2 > 0 \iff (y-x)(y+x) > 0 \underset{y+x>0}{\Rightarrow} y - x > 0]$$ 1.2.18

Έστω $\mu^2 = 2$. Τότε το μ δεν είναι ρητός $(**)$ ↯ [στην υπόθεση ότι $\mu \in \mathbb{Q}$]

$(**)$ $\mu^2 = 2 \Rightarrow \mu \notin \mathbb{Q}$:

Έστω ότι $\mu \in \mathbb{Q}$. Τότε $\exists\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$ "έτσι ώστε" $\mu = \frac{p}{q}$ και τα p και q δεν έχουν κοινό διαιρέτη (το 2).

$\Rightarrow \mu^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ είναι ζυγός

$\Rightarrow p$ είναι ζυγός [αν ήταν μονός, τότε $\exists\, k \in \mathbb{Z}: p = 2k+1$

$\Rightarrow p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ που είναι μονός ↯]

$\Rightarrow p = 2m,\ m \in \mathbb{Z} \Rightarrow p^2 = 4m^2 \Rightarrow \frac{p^2}{2} = 2m^2 = q^2$

$\Rightarrow q^2$ ζυγός $\Rightarrow q$ ζυγός. Άρα p, q ζυγοί $\Rightarrow$ διαιρούνται με το 2 ↯. $\square$

<u>Παρατηρήσεις:</u> α) Σύμφωνα με το αξίωμα πληρότητας το S έχει supremum <u>στο</u> $\mathbb{R}$, το $\mu := \sup S \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ $\left[\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}\right]$ με $\mu^2 = 2$. Είναι προφανές ότι ισχύει και $\mu = \sup \tilde{S}$, $\tilde{S} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^2 < 2\}$. Μια παρεμφερής απόδειξη του ότι $(\sup \tilde{S})^2 = 2$ δίνεται στο Θ. [1.6]. Μιας και το $\mu > 0$ με $\mu^2 = 2$ είναι μοναδικό $\left[\mu^2 = \tilde{\mu}^2 \Leftrightarrow (\mu - \tilde{\mu})\underbrace{(\mu + \tilde{\mu})}_{>0} = 0\right]$ μπορούμε να το συμβολίσουμε με $\sqrt{2}$ ή $2^{1/2}$ και να το ορίσουμε ως $\sqrt{2} := \sup S$ ή $\sqrt{2} := \sup \tilde{S}$.

β) Από την απόδειξη του Θ. [1.8] για το $\tilde{S}$, βλέπουμε ότι αν "έλειπε" το $\sqrt{2}$ από τον $\mathbb{R}$, τα $0 < x < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < x, x^2 < 2 \Leftrightarrow x \in \tilde{S}$ δεν θα είχαν supremum, θα υπήρχαν δηλαδή άπειρα όλο και μικρότερα άνω φράγματα με όριο το $\sqrt{2}$, η ύπαρξη του οποίου κάνει το $\mathbb{R}$ <u>συνεχές</u> (πβ. αργότερα με την έννοια της συνέχειας)
[πολύ περιγραφικά: "γεμίζοντας την τρύπα στην <u>οποία "πέφτουν"</u> τα άνω φράγματα"]