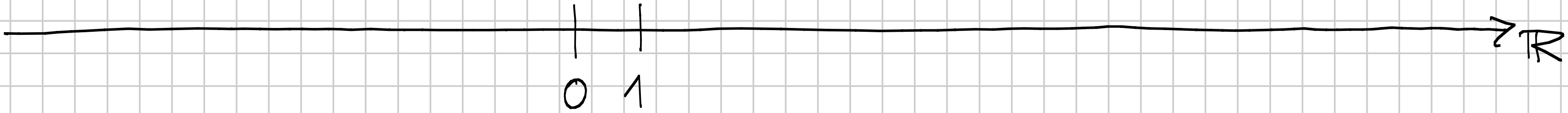
Εβδομάδα 2η / Θεωρία / 14.11.11 και 18.11.11

[§1.3] Στοιχεία από την τοπολογία του $\mathbb{R}$

Notiztitel 03.12.2011

Η τοπολογία του χώρου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, που ορίσαμε (μονοσήμαντα) μέσω των αξιωμάτων που τον διέπουν, ασχολείται με τις γεωμετρικές ιδιότητές του. Κατ' αρχήν μπορούμε να φανταστούμε τον $\mathbb{R}$ ως αναπαραστημένο, μέσω μιας 1-1 και επί συνάρτησης, από μια ευθεία στον χώρο, η οποία ως ευθεία είναι συνεχής (δηλ. δεν έχει "τρύπες": Αξίωμα Πληρότητας) στην οποία διακρίνονται δύο διαφορετικά σημεία που αντιστοιχούν στο 0 και στο 1 (Ύπαρξη ουδέτερων στοιχείων ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό στα Αξιώματα του Σώματος). Συνήθως τοποθετούμε το 1 δεξιότερα του 0 πάνω στην ευθεία υποδηλώνοντας ότι για κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}$ που αντιστοιχεί σε κάποιο σημείο της ευθείας, τα μικρότερα στοιχεία βρίσκονται αριστερά του σημείου και τα μεγαλύτερα δεξιά του, αφού από τα Αξιώματα Διάταξης προκύπτει ότι $0<1$.

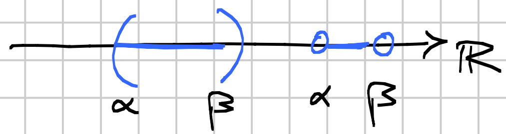
Έτσι η <u>ευθεία των πραγματικών αριθμών</u> αποκτά μια φορά και η απόσταση του σημείου 0 από το σημείο 1 υποδηλώνει μια <u>κλίμακα μέτρησης</u> (ή μετρική) $|1-0| = 1$, με την οποία μετράμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων πάνω στην ευθεία, δηλ. την "απόσταση" δύο στοιχείων του $\mathbb{R}$.



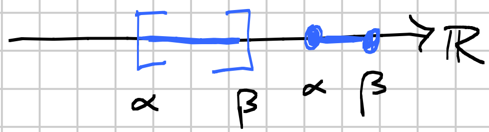
Κάποια υποσύνολα του $\mathbb{R}$ απεικονίζονται πολύ απλά στην ευθεία των πραγματικών. Αυτά είναι:

<u>Φραγμένα διαστήματα</u> : Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

<u>ανοικτό</u>: $(\alpha, \beta) := \{ x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta \}$



<u>κλειστό</u>: $[\alpha, \beta] := \{ x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq \beta \}$



ούτε ανοικτά ούτε κλειστά διαστήματα:

άνω ανοικτό, κάτω κλειστό: $[\alpha, \beta) := \{ x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x < \beta \}$

άνω κλειστό, κάτω ανοικτό: $(\alpha, \beta] := \{ x \in \mathbb{R} : \alpha < x \leq \beta \}$

Τα α και β λέγονται κάτω και άνω άκρο, αντίστοιχα, όλων αυτών των διαστημάτων (δηλ. ανεξάρτητα από το αν είναι στοιχεία του εκάστοτε διαστήματος ή όχι).

Μη φραγμένα διαστήματα: Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$.

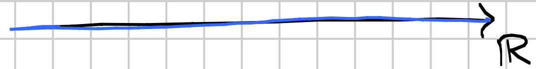
κάτω φραγμένο, ανοικτό: $(\alpha, \infty) := \{ x \in \mathbb{R} : x > \alpha \}$

κάτω φραγμένο, κλειστό: $[\alpha, \infty) := \{ x \in \mathbb{R} : x \geq \alpha \}$

άνω φραγμένο, ανοικτό: $(-\infty, \alpha) := \{ x \in \mathbb{R} : x < \alpha \}$

άνω φραγμένο, κλειστό: $(-\infty, \alpha] := \{ x \in \mathbb{R} : x \leq \alpha \}$

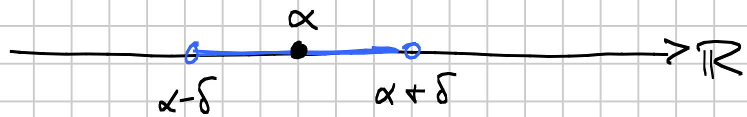
ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένο (ανοικτό) διάστημα: $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$



Περιοχή με κέντρο $\alpha \in \mathbb{R}$ και ακτίνα $\delta > 0$:

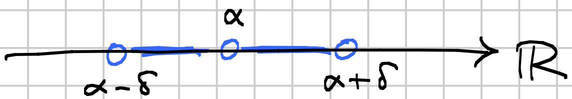
$$N_\delta(\alpha) := \{ x \in \mathbb{R} : |\alpha - x| < \delta \} = (\alpha - \delta, \alpha + \delta), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \delta > 0$$

($\Rightarrow N_\delta(\alpha)$ είναι φραγμένο και ανοικτό διάστημα)



Διακεκομμένη περιοχή με κέντρο $\alpha \in \mathbb{R}$ και ακτίνα $\delta > 0$:

$$N_\delta^*(\alpha) := N_\delta(\alpha) \setminus \{\alpha\} = \{ x \in \mathbb{R} : 0 < |\alpha - x| < \delta \} = (\alpha - \delta, \alpha) \cup (\alpha, \alpha + \delta),$$
$$\alpha \in \mathbb{R}, \delta > 0$$



Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

[§ 1.4] Η έννοια του ορίου ακολουθίας

Ορισμός [1.26]

Μία συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Η ακολουθία συμβολίζεται με $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ ή (α_ν) ή $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και η τιμή της ακολουθίας στο $\nu \in \mathbb{N}$ γράφεται $\alpha_\nu := \alpha(\nu)$ και ονομάζεται ν-οστός όρος της ακολουθίας.

[Κάθε ακολουθία (α_ν) έχει άπειρο (αριθμήσιμο) αριθμό όρων $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ αλλά όχι απαραίτητα τιμών υπό την έννοια ότι το σύνολο τιμών της μπορεί να έχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, όπως π.χ. η σταθερή ακολουθία $\alpha_\nu := k \in \mathbb{R}\ \forall \nu \in \mathbb{N}$.]

[Μια ακολουθία μπορεί να οριστεί με έναν αναλυτικό τύπο, ο οποίος δίνει την τιμή α_ν της (α_ν) στο $\nu\in\mathbb{N}$, π.χ. $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$, ή με έναν αναγωγικό τύπο, όπου κάθε όρος της (α_ν) ορίζεται ως συνάρτηση ενός ή περισσοτέρων προηγουμένων του (εκτός προφανώς από έναν ή περισσότερους αρχικούς, αντίστοιχα), π.χ. $\alpha_1=0, \alpha_2=1$, $\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}(\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1})$, $\nu\in\mathbb{N}$, $\nu\geq 2$.]

Συγκλίνουσες ακολουθίες

Ορισμός [1.27] Μιά ακολουθία (α_ν) συγκλίνει στο όριο $\ell\in\mathbb{R}$, $\alpha_\nu \to \ell$, αν και μόνο αν $\forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0\in\mathbb{N}\ \forall \nu>\nu_0 : |\alpha_\nu-\ell|<\varepsilon$, δηλ.

$$\boxed{\alpha_\nu \to \ell :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0\in\mathbb{N}\ \forall \nu>\nu_0 : |\alpha_\nu-\ell|<\varepsilon} \quad (*)$$

Παρατηρήσεις: α) Μια ακολουθία (α_ν) συγκλίνει $:\Longleftrightarrow \exists \ell\in\mathbb{R}: \alpha_\nu\to\ell$

β) Το $\nu_0\in\mathbb{N}$ στον ορισμό $(*)$ εξαρτάται από το ε : $\nu_0=\nu_0(\varepsilon)$

$\Longrightarrow$ Δεν αλλάζουμε την σειρά των ποσοδεικτών $\forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0\in\mathbb{N}$...

γ) $\alpha_\nu \to \ell \iff \exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 : |\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$

[$\Rightarrow$: προφανές $\Leftarrow$: Έστω $\varepsilon \geq \varepsilon_0$. Επιλέγουμε ένα $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_0)$
$\Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 : |\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon' < \varepsilon$]

δ) Μια ακολουθία (α_ν) συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν <u>σε κάθε οσοδήποτε μικρή περιοχή</u> του ℓ βρίσκονται <u>όλοι οι όροι</u> της (α_ν) <u>εκτός από πεπερασμένο αριθμό τους</u>.

<u>Ισοδύναμοι τρόποι γραφής του ορισμού (*)</u>:

1) $\alpha_\nu \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \in \mathbb{N} : \nu > \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$.

2) $\alpha_\nu \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 : \alpha_\nu \in N_\varepsilon(\ell)$

3) Αντί για "$\nu > \nu_0$" μπορούμε να γράψουμε "$\nu \geq \nu_0$" και/ή αντί για "$|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$" μπορούμε να γράψουμε "$|\alpha_\nu - \ell| \leq \varepsilon$".

4) Αντί για "$|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$" μπορούμε να γράψουμε "$|\alpha_\nu - \ell| < k\varepsilon$" για οποιοδήποτε $k > 0$, αφού $\varepsilon > 0 \underset{k>0}{\iff} k\varepsilon > 0$ (όπου βέβαια $\nu_0(\varepsilon) \neq \nu_0(k\varepsilon)$)

<u>Θεώρημα</u> [1.35]: Το όριο συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\alpha_\nu \to \ell \in \mathbb{R}$ και $\alpha_\nu \to \ell' \in \mathbb{R}$ με $\ell \neq \ell'$.
Τότε, εξ ορισμού, για $\varepsilon := \frac{|\ell-\ell'|}{2} > 0$ υπάρχουν $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$, ούτως ώστε $\forall \nu > \nu_1 : |\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$ και $\forall \nu > \nu_2 : |\alpha_\nu - \ell'| < \varepsilon$.
Άρα $\forall \nu > \nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\} : |\alpha_\nu - \ell|, |\alpha_\nu - \ell'| < \varepsilon$.

$$\Rightarrow |\ell-\ell'| = |\ell - \alpha_\nu + \alpha_\nu - \ell'| \leq |\ell - \alpha_\nu| + |\alpha_\nu - \ell'| < 2\varepsilon = |\ell - \ell'|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\ell = \ell'$. $\square$

<u>Παρατήρηση 1</u>: Η μοναδικότητα του ορίου <u>συγκλίνουσας</u> ακολουθίας $\alpha_\nu \to \ell \in \mathbb{R}$ μας επιτρέπει να μιλάμε για <u>το</u> όριο της (α_ν), το οποίο και γράφουμε $\lim \alpha_\nu$, δηλ. $\alpha_\nu \to \ell =: \lim \alpha_\nu \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα [1.32]: $\boxed{\frac{1}{\nu} \to 0}$

Απόδειξη: Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα έχουμε: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \nu > \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \left|\frac{1}{\nu}\right| = \frac{1}{\nu} < \varepsilon$, δηλ. $\frac{1}{\nu} \to 0$. □

Ορισμός [1.31]: (α_ν) μηδενική ακολουθία $:\Leftrightarrow \alpha_\nu \to 0$

Παράδειγμα: $\boxed{\alpha_\nu = k \in \mathbb{R}, \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha_\nu \to k}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}$ (π.χ. $\nu_0 = 1$) $\forall \nu \geq \nu_0$ (δηλ. $\forall \nu \in \mathbb{N}$)$: |\alpha_\nu - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$

Παράδειγμα [1.34]: $\boxed{\text{Η ακολουθία } \alpha_\nu = (-1)^\nu, \nu \in \mathbb{N} \text{ δεν συγκλίνει}}$.

Απόδειξη: Έστω ότι $\alpha_\nu \to \ell \in \mathbb{R}$, δηλ. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : |(-1)^\nu - \ell| < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ Για $\varepsilon := 1\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}, 2k > \nu_0 : |1 - \ell| < 1$, δηλ. $\ell \in (0,2)$

$[\ |1-\ell| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \ell < 1 \Leftrightarrow -2 < -\ell < 0 \Leftrightarrow 2 > \ell > 0\ ]$

και $\forall m \in \mathbb{N}, 2m - 1 > \nu_0 : |-1-\ell| < 1$, δηλ. $\ell \in (-2, 0)$ $\boxed{\lightning}$

$[\ |-1-\ell| < 1 \Leftrightarrow -1 < -1 - \ell < 1 \Leftrightarrow 0 < -\ell < 2 \Leftrightarrow 0 > \ell > -2\ ]$ □

<u>Ορισμός</u> [1.36]. Μια ακολουθία (α_ν) λέγεται <u>φραγμένη</u> αν το σύνολο τιμών της είναι φραγμένο, δηλ.

$$\boxed{(\alpha_\nu) \text{ φραγμένη } :\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}\ \forall \nu \in \mathbb{N} : |\alpha_\nu| \leq M}$$

<u>Θεώρημα</u> [1.37] : $\boxed{(\alpha_\nu) \text{ συγκλίνει } \Longrightarrow (\alpha_\nu) \text{ φραγμένη}}$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\alpha_\nu \to \ell \in \mathbb{R}$, δηλ. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : |\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Για $\varepsilon := 1\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : |\alpha_\nu - \ell| < 1$

$\Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : |\alpha_\nu| = |\alpha_\nu - \ell + \ell| \leq |\alpha_\nu - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} : |\alpha_\nu| \leq \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{\nu_0}|, 1 + |\ell|\} =: M$ $\square$

<u>Παρατήρηση</u> [1.38] α) (α_ν) φραγμένη $\not\Rightarrow$ (α_ν) συγκλίνει:

<u>Αντιπαράδειγμα</u>: Η $\alpha_\nu = (-1)^\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, αφού $|(-1)^\nu| = 1 \leq 1$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$, αλλά δεν συγκλίνει (βλ. Παραδ. [1.34]).

β) $\boxed{(\alpha_\nu) \text{ δεν είναι φραγμένη } \Longrightarrow (\alpha_\nu) \text{ δεν συγκλίνει}}$

Π.χ. οι ακολουθίες $\alpha_\nu = \nu$, $\beta_\nu = \sqrt{\nu}$, $\gamma_\nu = (-1)^\nu \nu$ δεν συγκλίνουν, αφού σύμφωνα με την Αρχιμήδεια Ιδιότητα $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \nu \in \mathbb{N} : M < \nu$ και $\nu = \alpha_\nu = \beta_{\nu^2} = \frac{\gamma_{2\nu}}{2}$.

Εφαρμογή [§1.4|1.]

α) $\alpha_\nu \to \ell \neq 0 \Rightarrow \exists\, k>0,\ \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : |\alpha_\nu| > k$

(και λέμε: "η (α_ν) είναι φραγμένη μακριά απ' το μηδέν")

β) $\alpha_\nu \neq 0\ \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_\nu \to \ell \neq 0 \Rightarrow \inf\{|\alpha_\nu| : \nu \in \mathbb{N}\} > 0$

Απόδειξη: α) $\ell \neq 0 \Rightarrow |\ell| > 0$. Αφού $\alpha_\nu \to \ell$, για $\varepsilon := \frac{|\ell|}{2} > 0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}$

$\forall \nu > \nu_0 : \quad |\alpha_\nu - \ell| < \frac{|\ell|}{2} \underset{||\alpha_\nu|-|\ell|| \leq |\alpha_\nu - \ell|}{\Longrightarrow} \big||\alpha_\nu| - |\ell|\big| < \frac{|\ell|}{2} \Rightarrow \underbrace{|\ell| - \frac{|\ell|}{2}}_{=:k} < |\alpha_\nu|$

β) Από το α): $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : |\alpha_\nu| > k > 0$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} : |\alpha_\nu| \geq m := \min\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_{\nu_0}|, k\}$ και $m > 0$, αφού $|\alpha_\nu| > 0\ \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Δηλ. το $m > 0$ είναι κάτω φράγμα της $(|\alpha_\nu|)$ και άρα $\inf\{|\alpha_\nu| : \nu \in \mathbb{N}\} \geq m > 0$.

$\square$

Παρατήρηση: Το $\inf\{|\alpha_\nu| : \nu \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι απαραίτητα $\min\{|\alpha_\nu| : \nu \in \mathbb{N}\}$, βλ. π.χ. την $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

<u>Παρατήρηση 2:</u> α) $\boxed{a_\nu \geq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N},\ a_\nu \to \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \ell \geq 0}$

αλλά β) $\boxed{a_\nu > 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N},\ a_\nu \to \ell \in \mathbb{R} \not\Rightarrow \ell > 0}$

<u>Απόδειξη:</u> α) Έστω $\ell < 0 \Rightarrow -\ell > 0$. Επιλέγοντας $\varepsilon := -\ell > 0$ έχουμε από τον ορισμό του $a_\nu \to \ell \in \mathbb{R}$ ότι $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : |a_\nu - \ell| = a_\nu - \ell < -\ell$, δηλ. $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : a_\nu < 0$, το οποίο είναι άτοπο αφού αντιφάσκει στην υπόθεση $a_\nu \geq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$.

β) Αντιπαράδειγμα: $a_\nu = \frac{1}{\nu} > 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\frac{1}{\nu} \to 0$

[§ 1.6] Άλγεβρα των ορίων – Βασικά θεωρήματα

Αν $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι δύο ακολουθίες τότε και το άθροισμα $\gamma_\nu := \alpha_\nu + \beta_\nu$, η διαφορά $\delta_\nu := \alpha_\nu - \beta_\nu$, το γινόμενο $\varepsilon_\nu := \alpha_\nu \cdot \beta_\nu$ και το πηλίκο $\zeta_\nu := \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ (όταν $\beta_\nu \neq 0 \; \forall \nu \in \mathbb{N}$) τους $\forall \nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία, όπως είναι και το κλιμακωτό γινόμενο $\eta_\nu := k\alpha_\nu$, $k \in \mathbb{R}$, και η ακολουθία των απόλυτων τιμών των όρων $\vartheta_\nu := |\alpha_\nu|$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, μιας ακολουθίας $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$.

<u>Θεώρημα</u> [1.48] (<u>Άλγεβρα των ορίων</u>)

$\alpha_\nu \to \ell \in \mathbb{R}$, $\beta_\nu \to m \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$

α) $\alpha_\nu \pm \beta_\nu \to \ell \pm m$

β) $\forall k \in \mathbb{R}: \; k\alpha_\nu \to k\ell$

γ) $\alpha_\nu \beta_\nu \to \ell m$

δ) $\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \to \dfrac{\ell}{m}$ όταν $\beta_\nu \neq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $m \neq 0$

ε) $|\alpha_\nu| \to |\ell|$

στ) $\sqrt{\alpha_\nu} \to \sqrt{\ell}$ όταν $\alpha_\nu \geq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

Απόδειξη:

$$\alpha_\nu \to \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_1 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_1 : |\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\beta_\nu \to m \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_2 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_2 : |\beta_\nu - m| < \varepsilon \quad (2)$$

α) $(1), (2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 := \max\{\nu_1, \nu_2\} \ \forall \nu > \nu_0 :$

$$|\alpha_\nu \pm \beta_\nu - (\ell \pm m)| = |\alpha_\nu - \ell \pm (\beta_\nu - m)| \leq |\alpha_\nu - \ell| + |\beta_\nu - m| < 2\varepsilon$$

β) $k = 0 \Rightarrow \gamma_\nu := 0 \cdot \alpha_\nu = 0 \to 0 = 0 \cdot \ell$

$k \neq 0 :$ $(1) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_1 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_1 :$

$$|k|\,|\alpha_\nu - \ell| = |k\alpha_\nu - k\ell| < |k|\varepsilon .$$

γ) (α_ν) συγκλίνει $\Rightarrow$ (α_ν) φραγμένη $\Leftrightarrow$ $\exists M>0\ \forall \nu\in\mathbb{N}: |\alpha_\nu|\leq M$ (3)

$\boxed{2.1/15}$

(1),(2),(3) $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0:=\max\{\nu_1,\nu_2\}\ \forall \nu>\nu_0:$

$$|\alpha_\nu\beta_\nu - \ell m| = |\alpha_\nu(\beta_\nu - m) + m(\alpha_\nu - \ell)|$$

$$\leq \underbrace{|\alpha_\nu|}_{\substack{\leq M \\ (3)}}\underbrace{|\beta_\nu - m|}_{\substack{<\varepsilon \\ (2)}} + |m|\underbrace{|\alpha_\nu - \ell|}_{\substack{<\varepsilon \\ (1)}} < (M+|m|)\varepsilon$$

δ) i) $\frac{1}{\beta_\nu}\to\frac{1}{m}$ όταν $\beta_\nu\neq 0\ \forall\nu\in\mathbb{N}$ και $m\neq 0$:

Αφού $\beta_\nu\neq 0\ \forall\nu\in\mathbb{N}$ και $\beta_\nu\to m\neq 0$, από την Εφαρμογή [§1.4/1.β)] (βλ. Παρατ. 1β) πιο πάνω) έχουμε $|\beta_\nu|\geq K:=\inf\{|\beta_\nu|:\nu\in\mathbb{N}\}>0\ \forall\nu\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{1}{|\beta_\nu|}\leq\frac{1}{K}\ \forall\nu\in\mathbb{N}$ (4)

(2),(4) $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\nu_2\in\mathbb{N}\ \forall\nu>\nu_2:$ $\left|\frac{1}{\beta_\nu}-\frac{1}{m}\right| = \left|\frac{m-\beta_\nu}{\beta_\nu m}\right| = \underbrace{\frac{1}{|\beta_\nu|}}_{\substack{\leq \frac{1}{K} \\ (4)}}\frac{1}{|m|}\underbrace{|\beta_\nu - m|}_{\substack{<\varepsilon \\ (2)}} < \frac{1}{K|m|}\varepsilon$

ii) $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\to\frac{\ell}{m}$ όταν $\beta_\nu\neq 0\ \forall\nu\in\mathbb{N}$, $m\neq 0$:

Προκύπτει από το i) και το γ).

ε) (1) $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \nu_1\in\mathbb{N}\ \forall \nu>\nu_1 : \big||\alpha_\nu|-|\ell|\big| \leq |\alpha_\nu-\ell| \underset{(1)}{<} \varepsilon$

στ) $\alpha_\nu \geq 0\ \forall \nu\in\mathbb{N}$ και $\alpha_\nu\to\ell \underset{\text{Παρατ. 2α)}}{\Longrightarrow} \ell\geq 0$

i) $\ell=0$: Αφού $\varepsilon>0 \Rightarrow \varepsilon^2>0$ και $\alpha_\nu=|\alpha_\nu|$ έχουμε από την (1)

$\forall \varepsilon>0\ \exists \nu_1\in\mathbb{N}\ \forall \nu>\nu_1 : \alpha_\nu<\varepsilon^2$, δηλ. (αφού $\alpha_\nu\geq 0$) $\sqrt{\alpha_\nu}<\varepsilon$

ii) $\ell>0$: (1) $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\nu_1\in\mathbb{N}\ \forall\nu>\nu_1$:

$$|\sqrt{\alpha_\nu}-\sqrt{\ell}| = \frac{|\alpha_\nu-\ell|}{\sqrt{\alpha_\nu}+\sqrt{\ell}} \leq \frac{|\alpha_\nu-\ell|}{\sqrt{\ell}} \underset{(1)}{<} \frac{1}{\sqrt{\ell}}\varepsilon$$

□

<u>Παρατήρηση</u> [1.48 ε)]:

α) $|\alpha_\nu|\to|\ell|>0 \not\Rightarrow \alpha_\nu\to\ell$:

Π.χ. η $\alpha_\nu=(-1)^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$, δεν συγκλίνει, ενώ $|\alpha_\nu|=1\to 1$.

β) $\boxed{|\alpha_\nu|\to 0 \Leftrightarrow \alpha_\nu\to 0}$:

$|\alpha_\nu|\to 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\nu_0\in\mathbb{N}\ \forall\nu>\nu_0 : \big||\alpha_\nu|\big| = |\alpha_\nu|<\varepsilon \Leftrightarrow \alpha_\nu\to 0$

2.1/17

Θεώρημα [1.49]: (Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \quad \underbrace{\alpha_\nu}_{\to \ell} \le \beta_\nu \le \underbrace{\gamma_\nu}_{\to \ell} \end{array}\right\} \Rightarrow \beta_\nu \to \ell}$$

Απόδειξη:

$\alpha_\nu \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_1 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_1 : |\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$, δηλ. $\ell - \varepsilon < \alpha_\nu < \ell + \varepsilon$ (1)

$\gamma_\nu \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_2 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_2 : |\gamma_\nu - \ell| < \varepsilon$, δηλ. $\ell - \varepsilon < \gamma_\nu < \ell + \varepsilon$ (2)

$\exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \quad \alpha_\nu \le \beta_\nu \le \gamma_\nu$ (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_3 := \max\{\nu_0, \nu_1, \nu_2\}\ \forall \nu > \nu_3$:

$\ell - \varepsilon \underset{(1)}{<} \alpha_\nu \underset{(3)}{\le} \beta_\nu \underset{(3)}{\le} \gamma_\nu \underset{(2)}{<} \ell + \varepsilon$, και άρα $\ell - \varepsilon < \beta_\nu < \ell + \varepsilon$, δηλ. $|\beta_\nu - \ell| < \varepsilon$.

$\square$

Παράδειγμα [1.52] : $\boxed{|\alpha|<1 \Rightarrow \alpha^\nu \to 0}$

Απόδειξη: (i) $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha^\nu = 0 \to 0$, (ii) $\alpha \neq 0$: $|\alpha| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \vartheta > 0 : \frac{1}{|\alpha|} = 1 + \vartheta \Rightarrow \frac{1}{|\alpha|^\nu} = (1+\vartheta)^\nu \underset{\substack{\text{ανισότητα} \\ \text{Bernoulli (βλ. Σημ. 3A/9)}}}{\geq} 1 + \nu\vartheta > \nu\vartheta \Rightarrow$

$$\left.\Rightarrow \underbrace{0}_{\to 0} \leq |\alpha|^\nu < \underbrace{\frac{1}{\vartheta}\underbrace{\frac{1}{\nu}}_{\to 0}}_{\to 0}\right\} \Rightarrow |\alpha|^\nu \to 0 \Leftrightarrow \alpha^\nu \to 0$$

□

Παράδειγμα [1.53] : $\boxed{\alpha > 0 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} \to 1}$

Απόδειξη: (i) $\alpha = 1 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} = 1 \to 1$, (ii) $\alpha > 1 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} > 1$ (αφού $x \leq 1 \Rightarrow x^\nu \leq 1$)

$\Rightarrow \exists\, \omega_\nu > 0 : \sqrt[\nu]{\alpha} = 1 + \omega_\nu \Rightarrow \alpha = (1+\omega_\nu)^\nu \underset{\text{αν. Bernoulli}}{\geq} 1 + \nu\omega_\nu \Rightarrow 0 < \omega_\nu \leq (\alpha - 1)\frac{1}{\nu}$

$\Rightarrow \omega_\nu \to 0 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} = 1 + \omega_\nu \to 1$, (iii) $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt[\nu]{\alpha} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \delta_\nu > 0 : \sqrt[\nu]{\alpha} = \frac{1}{1+\delta_\nu} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{(1+\delta_\nu)^\nu} \underset{\text{αν. Bern.}}{\leq} \frac{1}{1+\nu\delta_\nu} < \frac{1}{\nu\delta_\nu} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < \delta_\nu < \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\nu} \Rightarrow \delta_\nu \to 0 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} = \frac{1}{1+\delta_\nu} \to 1$

□

Παράδειγμα [1.54]: $\boxed{\sqrt[\nu]{\nu} \to 1}$

Απόδειξη: $\nu \geq 1 \Rightarrow \sqrt[2\nu]{\nu} \geq 1 \Rightarrow \exists\, \delta_\nu \geq 0 : \sqrt[2\nu]{\nu} = 1 + \delta_\nu \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\nu} = (1+\delta_\nu)^\nu \underset{\text{αν. Bern.}}{\geq} 1 + \nu\delta_\nu > \nu\delta_\nu \Rightarrow 0 \leq \delta_\nu < \frac{1}{\sqrt{\nu}} \to 0 \Rightarrow \delta_\nu \to 0$

$\Rightarrow \sqrt[\nu]{\nu} = (1+\delta_\nu)^2 = 1 + 2\delta_\nu + \delta_\nu^2 \to 1$ $\square$

Παραδείγματα (Ασκήσεις) ([1.33], [Ασκ. 1.7], [1.50], [1.51]):

α) $\dfrac{5\nu - 4}{2 - 3\nu} = \dfrac{5 - \frac{4}{\nu}}{\frac{2}{\nu} - 3} \xrightarrow[\text{και } \frac{1}{\nu} \to 0]{\text{άλγεβρα ορίων}} -\dfrac{5}{3}$

β) $\dfrac{6\nu - 1}{\frac{1}{2} - \nu} = \dfrac{6 - \frac{1}{\nu}}{\frac{1}{2\nu} - 1} \xrightarrow[\text{αλγ. ορ.}]{} -6$

γ) $\dfrac{2\nu^2 + 1}{\nu^2 + 3\nu} = \dfrac{2 + \frac{1}{\nu^2}}{1 + \frac{3}{\nu}} \xrightarrow[\text{αλγ. ορ.}]{} 2$, αφού $\frac{1}{\nu} \to 0 \underset{\text{άλγεβρα ορίων}}{\Rightarrow} \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{\nu} \to 0$

δ) $\dfrac{7\nu^3-6\nu^2+5\nu+4}{5\nu^3+2\nu^2+\nu} = \dfrac{7-\frac{6}{\nu}+\frac{5}{\nu^2}+\frac{4}{\nu^3}}{5+\frac{2}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}} \xrightarrow[\text{ορ.}]{\text{αλγ.}} \dfrac{7}{5}$,

αφού $\boxed{\dfrac{1}{\nu^k} \to 0 \ \forall k \in \mathbb{N}}$

[$\frac{1}{\nu} \to 0$ και αν $\frac{1}{\nu^k} \to 0$ τότε (άλγεβρα ορίων) και $\frac{1}{\nu^{k+1}} = \frac{1}{\nu^k} \cdot \frac{1}{\nu} \to 0$]

ε) $\dfrac{2\nu}{\nu^2+1} = \dfrac{2}{\nu+\frac{1}{\nu}} = \dfrac{2}{\nu\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)} = \underbrace{\dfrac{2}{\nu}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{1+\frac{1}{\nu^2}}}_{\to 1} \xrightarrow[\text{ορ.}]{\text{αλγ.}} 0$

στ) Να δειχθεί: Έστω $c \in \mathbb{R}$. Αν $\forall \varepsilon > 0 : |c| \leq \varepsilon$, τότε $c = 0$:

Έστω $c \neq 0 \Rightarrow |c| > 0$. Τότε, αφού $\forall \varepsilon > 0 : |c| \leq \varepsilon$, επιλέγοντας το $\varepsilon := \frac{|c|}{2} > 0$ έχουμε $|c| \leq \frac{|c|}{2} \underset{|c|>0}{\iff} 1 \leq \frac{1}{2}$ που είναι άτοπο.

Επιπλέον για $c = 0$ ισχύει πραγματικά: $\forall \varepsilon > 0 : 0 \leq \varepsilon$, αφού $\varepsilon < 0 \Rightarrow \varepsilon \leq 0$.