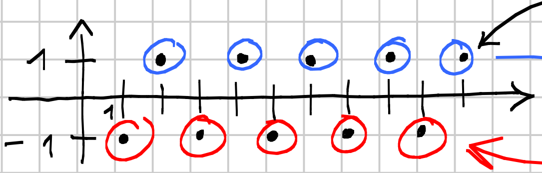
Εβδομάδα 3η / Θεωρία / 21.11.11

[§1.5] Η έννοια της υπακολουθίας

Ορισμός [1.39] Έστω $(a_\nu) \subset \mathbb{R}$ και $\boxed{(k_\nu) \subset \mathbb{N} \text{ με } k_\nu < k_{\nu+1} \ \forall \nu \in \mathbb{N}}$.

Τότε $\boxed{\text{η ακολουθία } (a_{k_\nu}) \subset \mathbb{R} \text{ λέγεται υπακολουθία της } (a_\nu)}$.



$a_\nu = (-1)^\nu$ ακολουθία

$a_{2\nu} = 1$ με $k_\nu = 2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ μια υπακολουθία

$a_{2\nu-1} = -1$ με $k_\nu = 2\nu - 1$, $\nu \in \mathbb{N}$ μια άλλη υπακολουθία

Παράδειγμα [1.42]: $a_\nu = \cos \frac{\nu\pi}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad a_{4\nu} = \cos(2\nu\pi) = \cos 0 = 1, \quad a_{4\nu-1} = \cos\left(2\nu\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$

$a_{4\nu-2} = \cos(2\nu\pi - \pi) = \cos(-\pi) = -1, \quad a_{4\nu-3} = \cos\left(2\nu\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

<u>Θεώρημα</u> [1.43]: $\alpha_\nu \to \ell \Rightarrow \alpha_{k_\nu} \to \ell \quad \forall (k_\nu) \subset \mathbb{N}$ με $k_\nu < k_{\nu+1} \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

<u>Απόδειξη</u>: $k_\nu \in \mathbb{N},\ k_\nu < k_{\nu+1} \ \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{k_\nu \geq \nu \ \forall \nu \in \mathbb{N} \quad (1)}$

$[\nu = 1: \ k_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow k_1 \geq 1, \quad \nu \to \nu+1: k_{\nu+1} > k_\nu \geq \nu \Rightarrow k_{\nu+1} \geq \nu+1]$

$\alpha_\nu \to \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0: |\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon \boxed{\underset{(1)}{\Rightarrow}} |\alpha_{k_\nu} - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \alpha_{k_\nu} \to \ell$ $\square$

<u>Πόρισμα</u>: $\forall k \in \mathbb{N}_0: \ \alpha_\nu \to \ell \Leftrightarrow \alpha_{\nu+k} \to \ell$

<u>Απόδειξη</u>: "$\Rightarrow$": Θ. [1.43] με $k_\nu := \nu + k$

"$\Leftarrow$": $\alpha_{\nu+k} \to \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0: |\alpha_{\nu+k} - \ell| < \varepsilon \quad (2)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_1 (\geq \nu_0 + k) \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_1: |\alpha_\nu - \ell| = |\alpha_{\underbrace{\nu - k}_{> \nu_0} + k} - \ell| \underset{(2)}{<} \varepsilon$

<u>Παρατηρήσεις</u> [1.44 – 1.46]: α) $\alpha_{k_\nu} \to \ell$ για κάποια υπακολουθία $\not\Rightarrow \alpha_k \to \ell$,
π.χ. η $\alpha_{2\nu} = 1$ της $\alpha_\nu = (-1)^\nu$ συγκλίνει ενώ η α_ν δεν συγκλίνει.

β) (α_{k_ν}) δεν συγκλίνει για κάποια υπακολ. $\Rightarrow (\alpha_\nu)$ δεν συγκλίνει:
Αν η (α_ν) συνέκλινε τότε θα συνέκλιναν όλες οι υπακολ., άρα και η (α_{k_ν}).

γ) Αν $\alpha_{k_\nu} \to k$ και $\alpha_{\ell_\nu} \to \ell$ με $k \neq \ell$ τότε η (α_ν) δεν συγκλίνει:

Αν $\alpha_\nu \to m \underset{[1.43]}{\Rightarrow} \alpha_{k_\nu} \to m,\ \alpha_{\ell_\nu} \to m \underset{[1.48]}{\Rightarrow} \alpha_{k_\ell} - \alpha_{\ell_\nu} \to 0 \neq k-\ell$, άτοπο ([1.35])

[π.χ. $\alpha_\nu = (-1)^\nu$ δεν συγκλίνει, $\alpha_{2\nu} = 1,\ \alpha_{2\nu-1} = -1$]

δ) (α_ν) φραγμένη $\Rightarrow (\alpha_{k_\nu})$ φραγμένη, αφού $\{\alpha_{k_\nu} : \nu \in \mathbb{N}\} \subseteq \{\alpha_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$

ε) (α_ν) συγκλίνει και $\alpha_{k_\nu} \to \ell$ για κάποια υπακολ. $\Rightarrow \alpha_\nu \to \ell$:

$\alpha_\nu \to m \underset{[1.43]}{\Rightarrow} \alpha_{k_\nu} \to m \underset{[1.35]}{\Rightarrow} m = \ell$

<u>Θεώρημα</u> [1.47] $\alpha_\nu \to \ell \iff \alpha_{2\nu} \to \ell$ και $\alpha_{2\nu-1} \to \ell$

<u>Απόδειξη</u>: "$\Rightarrow$": [1.43] με $k_\nu = 2\nu$ και $k_\nu = 2\nu - 1$

"$\Leftarrow$": $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_1 \in \mathbb{N}\ \forall k > k_1\ |\alpha_{2k-1} - \ell| < \varepsilon$ (1) και $\exists k_2 \in \mathbb{N}\ \forall k > k_2\ |\alpha_{2k} - \ell| < \varepsilon$ (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall \nu = 2k-1 > \nu_0 := \max\{2k_1 - 1, 2k_2\} : |\alpha_\nu - \ell| = |\alpha_{\underbrace{2k}_{>k_1}-1} - \ell| \underset{(1)}{<} \varepsilon \\ \forall \nu = 2k > \nu_0 : |\alpha_\nu - \ell| = |\alpha_{2\underbrace{k}_{>k_2}} - \ell| \underset{(2)}{<} \varepsilon \end{cases}$$

∎

<u>Εφαρμογή</u> [§1.5]: $\alpha_\nu \to \ell,\ \beta_\nu \to \ell \Rightarrow \gamma_\nu := \begin{cases} \alpha_k, & \nu = 2k-1 \\ \beta_k, & \nu = 2k \end{cases} \longrightarrow \ell$:

<u>Απόδειξη</u>: Αφού $\gamma_{2k} = \beta_k \to \ell$ και $\gamma_{2k-1} = \alpha_k \to \ell \underset{[1.47]}{\Rightarrow} \gamma_\nu \to \ell$. ∎

[§ 1.7] Μονότονες ακολουθίες

Ορισμός [1.55] : Μια ακολουθία (α_ν) λέγεται

α) αύξουσα $:\Leftrightarrow \alpha_\nu \leq \alpha_{\nu+1} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

β) γνησίως αύξουσα $:\Leftrightarrow \alpha_\nu < \alpha_{\nu+1} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

γ) φθίνουσα $:\Leftrightarrow \alpha_\nu \geq \alpha_{\nu+1} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

δ) γνησίως φθίνουσα $:\Leftrightarrow \alpha_\nu > \alpha_{\nu+1} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

ε) μονότονη $:\Leftrightarrow$ η (α_ν) είναι αύξουσα ή φθίνουσα

στ) γνησίως μονότονη $:\Leftrightarrow$ η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα

Παράδειγμα [1.56] α) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu-7}{3\nu+2}$, $\nu \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \frac{2(\nu+1)-7}{3(\nu+1)+2} - \frac{2\nu-7}{3\nu+2} = \frac{2\nu-5}{3\nu+5} - \frac{2\nu-7}{3\nu+2} =$$

$$= \frac{(2\nu-5)(3\nu+2) - (2\nu-7)(3\nu+5)}{(3\nu+5)(3\nu+2)}$$

$$= \frac{\cancel{6\nu^2} - \cancel{15\nu} + \cancel{4\nu} - 10 - \cancel{6\nu^2} + \cancel{21\nu} - \cancel{10\nu} + 35}{(3\nu+5)(3\nu+2)} = \frac{25}{(3\nu+5)(3\nu+2)}$$

$> 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$, και άρα η (α_ν) είναι (γνησίως) αύξουσα.

β) $\beta_\nu = \dfrac{1}{2^\nu}$, $\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \dfrac{1}{2^{\nu+1}} \dfrac{2^\nu}{1} = \dfrac{1}{2} < 1 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$,

και άρα η (β_ν) είναι (γνησίως) φθίνουσα.

Παρατήρηση: Αν οι όροι μιας ακολουθίας αλλάζουν πρόσημο, τότε αυτή δεν είναι μονότονη,

Π.χ., αν $\alpha_\nu = (-1)^\nu \beta_\nu$ με $\beta_\nu > 0 \; \forall \nu \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = (-1)^{\nu+1} \underbrace{(\beta_{\nu+1} + \beta_\nu)}_{> 0 \; \forall \nu \in \mathbb{N}} \begin{cases} > 0 & \text{για } \nu = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \\ < & \text{για } \nu = 2k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Παράδειγμα [1.57] Η (α_ν) με $\alpha_1 = 1$, $\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{4}(2\alpha_\nu + 3)$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι γνήσια αύξουσα, αφού $\Delta_1 := \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{5}{4} - 1 > 0$ και $\Delta_\nu > 0 \Rightarrow \Delta_{\nu+1} > 0$: $\Delta_{\nu+1} := \alpha_{\nu+2} - \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\Delta_\nu > 0$

Παράδειγμα [1.58] Η (α_ν) με $\alpha_1 = 1$, $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{4 + 3\alpha_\nu}{3 + 2\alpha_\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι γνήσια αύξουσα : $\alpha_1 > 0$ και $\alpha_\nu > 0 \Rightarrow \alpha_{\nu+1} > 0 \Rightarrow \alpha_\nu > 0 \; \forall \nu \in \mathbb{N}$ και συνεπώς, αφού $\Delta_{\nu+1} = \cdots = \dfrac{\Delta_\nu}{(3+2\alpha_{\nu+1})(3+2\alpha_\nu)}$, $\Delta_\nu > 0 \Rightarrow \Delta_{\nu+1} > 0$.
Έτσι, αφού $\Delta_1 = \frac{7}{5} - 1 > 0$, επαγωγικά $\Delta_\nu > 0 \; \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα [1.59]:

α) (α_ν) αύξουσα και άνω φραγμένη $\Rightarrow$ $\alpha_\nu \to \ell = \sup\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$

β) (β_ν) φθίνουσα και κάτω φραγμένη $\Rightarrow$ $\beta_\nu \to m = \inf\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$

Απόδειξη: α) Αφού η (α_ν) είναι άνω φραγμένη, δηλ. το σύνολο τιμών της $\{\alpha_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ έχει άνω φράγμα και προφανώς δεν είναι κενό, σύμφωνα με το Αξίωμα Πληρότητας $\exists\ \ell \underset{(1)}{:=} \sup\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει (βλ. Θ. [1.10]) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N} : \ell - \varepsilon < \alpha_{\nu_0}$ (2). Αφού η (α_ν) είναι αύξουσα $\forall\, \nu > \nu_0 : \alpha_{\nu_0} \leq \alpha_\nu$ (3). Από τις (1), (2) και (3) έχουμε

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \quad \ell - \varepsilon \underset{(2)}{<} \alpha_{\nu_0} \underset{(3)}{\leq} \alpha_\nu \underset{(1)}{\leq} \ell < \ell + \varepsilon \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon, \text{ δηλ. } \alpha_\nu \to \ell$$

β) [Αντίστοιχα:] (β_ν) κάτω φραγμένη $\Rightarrow \exists\, m := \inf\{\beta_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ και $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_1 \in \mathbb{N}$: $\beta_{\nu_1} < m + \varepsilon \underset{(\beta_\nu) \text{ φθίνουσα}, \ \beta_\nu \geq m\ \forall \nu \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_1 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_1 : m - \varepsilon < m \leq \beta_\nu \leq \beta_{\nu_1} < m + \varepsilon$
$\Rightarrow |\beta_\nu - m| < \varepsilon$, δηλ. $\beta_\nu \to m$. $\square$

Παρατηρήσεις: α) Οι συνθήκες "(α_ν) αύξουσα και άνω φραγμένη" και "(β_ν) φθίνουσα και κάτω φραγμένη" είναι ικανές αλλά όχι αναγκαίες συνθήκες. Π.χ. η $\gamma_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ δεν είναι μονότονη (βλ. Παρατήρηση πιο πάνω) αλλά $|\gamma_\nu| = \frac{1}{\nu} \to 0 \underset{\text{βλ. Ασκήσεις}}{\Leftrightarrow} \gamma_\nu \to 0$.

β) Από τα θεωρήματα [1.59], [1.37], [1.35] έχουμε:

(α_ν) αύξουσα και $\alpha_\nu \to \ell \Rightarrow \ell = \sup\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$ (και άρα $\alpha_\nu \le \ell \ \forall \nu \in \mathbb{N}$)

(β_ν) φθίνουσα και $\beta_\nu \to m \Rightarrow m = \inf\{\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$ (και άρα $\beta_\nu \ge m \ \forall \nu \in \mathbb{N}$)

Παράδειγμα [1.65] Η γνήσια αύξουσα ακολουθία (α_ν) του Παραδ. [1.58] είναι άνω φραγμένη αφού $\alpha_{\nu+1} = \frac{4+3\alpha_\nu}{3+2\alpha_\nu} = \frac{\frac{3}{2}(3+2\alpha_\nu) - \frac{1}{2}}{3+2\alpha_\nu} < \frac{3}{2} \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

$\underset{\alpha_1 = 1}{\Longrightarrow} \alpha_\nu < \frac{3}{2} \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

$\underset{\text{Θ.[1.59]}}{\Longrightarrow} \alpha_\nu \to \ell \left(= \sup\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}\right)$ και $\underbrace{\alpha_{\nu+1}}_{\to \ell \text{ σύγκλιση υπακ. [1.43]}} = \frac{4+3\alpha_\nu}{3+2\alpha_\nu} \xrightarrow[\text{ορίων [1.48]}]{\text{άλγεβρα}} \frac{4+3\ell}{3+2\ell}$

$\underset{\text{μονοσημ. ορίου [1.35]}}{\Longrightarrow} \ell = \frac{4+3\ell}{3+2\ell} \underset{\ell \ge 1 \text{ (βλ. (*) πιο κάτω)}}{\Longrightarrow} \ell = \sqrt{2}$.

<u>Άσκηση</u> [§1.7, Εφ. 3]: Δίνεται η ακολουθία α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ με

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_{\nu+1} = 1 + \frac{1}{\alpha_\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Να αποδείξετε ότι η υπακολουθία $\alpha_{2\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι γνήσια αύξουσα, ενώ η υπακολουθία $\alpha_{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι γνήσια φθίνουσα. Να αποδείξετε επίσης ότι οι δύο αυτές υπακολουθίες έχουν κοινό όριο τη θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 0$, δηλ. το $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

<u>Λύση</u>: Θέλοντας να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα σύμφωνα με το οποίο μια μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει (Θ.[1.59]) εξετάζουμε το αν η (α_ν) είναι φραγμένη.

Καθώς η (α_ν) δίνεται αναδρομικά και $\alpha_1 = 1$, παρατηρούμε ότι

αν $\alpha_\nu \in [1, x]$ (όπου $x > 1$) για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}$

τότε $\frac{1}{\alpha_\nu} \in [\frac{1}{x}, 1] \iff \alpha_{\nu+1} = 1 + \frac{1}{\alpha_\nu} \in [1 + \frac{1}{x}, 2] \subset [1, x]$

για $x \geq 2$. Αφού $\alpha_1 = 1$, επαγωγικά ισχύει $\alpha_\nu \in [1, x]$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ με $x \geq 2$

και άρα η (α_ν) είναι φραγμένη.

Αφού $\alpha_{\nu+2} - \alpha_{\nu+1} = 1 + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}} - 1 - \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu \alpha_{\nu+1}} = -\frac{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu}{\alpha_\nu \alpha_{\nu+1}}$

παρατηρούμε ότι δύο διαδοχικές διαφορές $\Delta_\nu := \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ μεταξύ γειτονικών όρων αλλάζουν πρόσημο και άρα η (α_ν) δεν είναι μονότονη.

Από την άλλη δυο διαδοχικές διαφορές όρων με διαφορά δεικτών 2

3.1/11

$$\alpha_{\nu+2}-\alpha_\nu = 1+\frac{1}{\alpha_{\nu+1}} - 1 - \frac{1}{\alpha_{\nu-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha_\nu}} - \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha_{\nu-2}}}$$

$$= \frac{\alpha_\nu}{1+\alpha_\nu} - \frac{\alpha_{\nu-2}}{1+\alpha_{\nu-2}} = \frac{\alpha_\nu + \cancel{\alpha_\nu\alpha_{\nu-2}} - \alpha_{\nu-2} - \cancel{\alpha_\nu\alpha_{\nu-2}}}{(1+\alpha_\nu)(1+\alpha_{\nu-2})}$$

δεν αλλάζουν πρόσημο.

Άρα η $(\alpha_{2\nu})$, $(\alpha_{2\nu-1})$ είναι μονότονες

[$$\alpha_{2\nu+2}-\alpha_{2\nu} = \alpha_{2(\nu+1)} - \alpha_{2\nu} = \frac{\alpha_{2\nu}-\alpha_{2\nu-2}}{(1+\alpha_{2\nu})(1+\alpha_{2\nu-2})} =$$

$$= \frac{\alpha_{2\nu}-\alpha_{2(\nu-1)}}{(1+\alpha_{2\nu})(1+\alpha_{2(\nu-1)})}$$ και

$$\alpha_{2\nu-1+2}-\alpha_{2\nu-1} = \alpha_{2(\nu+1)-1} - \alpha_{2\nu-1} = \frac{\alpha_{2\nu-1}-\alpha_{2\nu-1-2}}{(1+\alpha_{2\nu-1})(1+\alpha_{2\nu-1-2})}$$

$$= \frac{\alpha_{2\nu-1}-\alpha_{2(\nu-1)-1}}{(1+\alpha_{2\nu-1})(1+\alpha_{2(\nu-1)-1})}$$]

και αφού $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots) = \left(1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots\right)$

έχουμε $\alpha_3-\alpha_1=\frac{3}{2}-1>0$ και $\alpha_4-\alpha_2=\frac{5}{3}-2<0$

$\Rightarrow$ $(\alpha_{2\nu-1})$ γνήσια αύξουσα και $(\alpha_{2\nu})$ γνήσια φθίνουσα

Αφού η (α_ν) και άρα και οι $(\alpha_{2\nu-1})$, $(\alpha_{2\nu})$ είναι φραγμένες

έχουμε από το Θ.[1.59] $\alpha_{2\nu-1}\to \ell\in\mathbb{R}$, $\alpha_{2\nu}\to \ell'\in\mathbb{R}$

και αφού από τον αναγωγικό τύπο έχουμε

$$\alpha_{2\nu-1}=1+\frac{1}{\alpha_{2\nu-2}} \iff \Big(\underbrace{\alpha_{2\nu-1}}_{\to \ell}-1\Big)\underbrace{\alpha_{2\nu-2}}_{\to \ell'}=1$$

και $$\alpha_{2\nu}=1+\frac{1}{\alpha_{2\nu-1}} \iff \underbrace{\alpha_{2\nu-1}}_{\to \ell}\Big(\underbrace{\alpha_{2\nu}}_{\to \ell'}-1\Big)=1$$

$$\underset{\text{άλγεβρα ορίων}}{\Longrightarrow} \quad (\ell-1)\ell'=1,\quad \ell(\ell'-1)=1$$

$$\Rightarrow \quad \ell=\ell'$$

και $(\ell-1)\ell=1 \iff \ell^2-\ell-1=0 \iff \left(\ell-\frac{1}{2}\right)^2-1-\frac{1}{4}=0$

$$\iff \left(\ell-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\ell-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=0 \underset{\ell\geq 1\ (*)}{\Longrightarrow} \ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(*) $\boxed{\beta_\nu \geq \beta \ \forall \nu\in\mathbb{N} \text{ και } \beta_\nu \to b \ \Rightarrow \ b\geq \beta}$

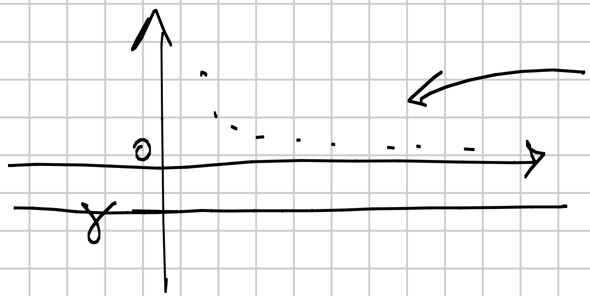
$\Leftrightarrow \ \underbrace{\beta_\nu - \beta}_{=:\gamma_\nu} \geq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\underbrace{\beta_\nu - \beta}_{=\gamma_\nu} \to \underbrace{b-\beta}_{=:\gamma} \Rightarrow \underbrace{b-\beta}_{=\gamma} \geq 0$,

αφού αν $\gamma < 0$, θα υπήρχε για $\varepsilon := -\frac{\gamma}{2} > 0$ κάποιο $\nu_0 \in \mathbb{N}$

με $\underbrace{|\gamma_\nu - \gamma| < -\frac{\gamma}{2}} \ \forall \nu > \nu_0$

$\Longrightarrow \gamma_\nu - \gamma < -\frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \gamma_\nu < \frac{\gamma}{2} < 0$ ↯ αφού $\gamma_\nu \geq 0$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$

□



$\gamma_\nu \geq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

το όριο γ δεν μπορεί να είναι < 0 αφού αν $\gamma_\nu \geq 0 \ \forall \nu\in\mathbb{N}$, τα γ_ν δεν μπορούν να το "πλησιάσουν οσοδήποτε κοντά" δηλ. η (γ_ν) δεν συγκλίνει σε κάποιο $\gamma < 0$.

<u>Άσκηση</u> [Α. 1.26] Να αποδείξετε ότι η (α_ν) με

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_1^2 > k > 0 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \frac{k - \alpha_\nu^2}{2\alpha_\nu} \quad (1)$$

συγκλίνει στο $\inf\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} = \sqrt{k}$.

<u>Απόδειξη</u>: Αφού $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{k + \alpha_\nu^2}{2\alpha_\nu}$ έχουμε: $\alpha_\nu > 0 \Rightarrow \alpha_{\nu+1} > 0$.

Επειδή $\alpha_1 > 0$, συνεπάγεται επαγωγικά: $\alpha_\nu > 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Επίσης $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k}{\alpha_\nu} + \alpha_\nu\right) \underset{(*)}{\geq} \sqrt{\dfrac{k}{\alpha_\nu} \cdot \alpha_\nu} = \sqrt{k} \Rightarrow \alpha_{\nu+1}^2 \geq k \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

$\underset{\alpha_1^2 > k}{\Longrightarrow} \alpha_\nu^2 \geq k \ \forall \nu \in \mathbb{N} \underset{(1)}{\Longrightarrow} \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu \leq 0$. Άρα

Άρα η (α_ν) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη $\underset{\text{Θ. [1.59] β)}}{\Longrightarrow} \alpha_\nu \to \ell = \inf\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$

και $\underbrace{\alpha_{\nu+1}}_{\to \ell} = \dfrac{1}{2}\left(\underbrace{\dfrac{k}{\alpha_\nu}}_{\to \frac{k}{\ell}} + \underbrace{\alpha_\nu}_{\to \ell}\right) \Leftrightarrow \ell = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k}{\ell} + \ell\right) \Leftrightarrow \ell = \dfrac{k}{\ell} \underset{\ell \geq 0}{\Leftrightarrow} \ell = \sqrt{k}$

(*) $\forall x, y > 0: \dfrac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$