Εβδομάδα 3η / Θεωρία / 24.11.2011

Notiztitel 23.11.2011

[§1.8] Κιβωτισμός διαστημάτων

Ορισμός [1.67]: Η ακολουθία διαστημάτων $\Delta_\nu := [\alpha_\nu, \beta_\nu]$ όπου $\alpha_\nu, \beta_\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$ λέγεται κιβωτισμός κλειστών διαστημάτων αν και μόνο αν $\forall \nu \in \mathbb{N}$: α) $\Delta_\nu \neq \emptyset$ και β) $\Delta_{\nu+1} \subseteq \Delta_\nu$ δηλ., ισοδύναμα, $\forall \nu \in \mathbb{N}$: α) $\alpha_\nu \leq \beta_\nu$ και β) $\alpha_\nu \leq \alpha_{\nu+1}$ και $\beta_{\nu+1} \leq \beta_\nu$.

Αν επιπλέον γ) $\alpha_\nu - \beta_\nu \to 0$, τότε ο κιβωτισμός κλειστών διαστημάτων λέγεται κιβωτισμός κλειστών διαστημάτων του Cantor.

<u>Θεώρημα [1.68]</u> : Αν $\Delta_\nu = [\alpha_\nu, \beta_\nu]$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι ένας κιβωτισμός κλειστών διαστημάτων του Cantor, τότε

$$\underbrace{\exists}_{\text{"ύπαρξη"}} \underbrace{!}_{\text{"μοναδικό"}} \xi \in \mathbb{R} : \xi \in \Delta_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$$

$$\left[\iff \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu = \{\xi\} \right]$$

<u>Απόδειξη</u> : <u>Ύπαρξη</u>: Αφού Δ_ν είναι ένας κιβωτισμός κλειστών διαστημάτων έχουμε $\alpha_1 \leq \alpha_\nu \leq \alpha_{\nu+1} \leq \beta_{\nu+1} \leq \beta_\nu \leq \beta_1 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha_\nu) \text{ αύξουσα και άνω φραγμένη} \\ (\beta_\nu) \text{ φθίνουσα και κάτω φραγμένη} \end{cases}$$

$$\underset{\Theta.[1.59]}{\Longrightarrow} \exists \ \xi, \xi' \in \mathbb{R} : \begin{aligned} \xi &= \lim \alpha_\nu = \sup\{\alpha_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \quad (1) \\ \xi' &= \lim \beta_\nu = \inf\{\beta_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \xi - \xi' = \lim \alpha_\nu - \lim \beta_\nu \underset{\substack{\text{άλγεβρα} \\ \text{των ορίων}}}{\uparrow =} \lim(\alpha_\nu - \beta_\nu) \underset{\substack{\Delta_\nu \text{ είναι κ.κ.δ.} \\ \text{του Cantor}}}{\uparrow =} 0$$

και (από τις (1) και (2)) $\alpha_\nu \leq \xi = \xi' \leq \beta_\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$,

δηλ. $\xi \, (= \xi') \in \Delta_\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$.

<u>Μοναδικότητα</u>: Αφού $\lim \alpha_\nu = \lim \beta_\nu$, τότε για κάθε $\zeta \in \mathbb{R}$ με $\zeta \in \Delta_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$, δηλ. $\alpha_\nu \leq \zeta \leq \beta_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$, έχουμε από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών (Θ. [1.49]): $\zeta = \lim \alpha_\nu (= \lim \beta_\nu)$, που λόγω του μονοσήμαντου του ορίου συγκλίνουσας ακολουθίας (Θ. [1.35]) συνεπάγεται ότι το ζ είναι μοναδικό. $\square$

3.2/4

Παρατήρηση: Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι κάθε κιβωτισμός κλειστών διαστημάτων του Cantor ορίζει έναν πραγματικό αριθμό, δηλ. ότι ισχύει το Αξίωμα του Κιβωτισμού, το οποίο ως τέτοιο (δηλ. αξίωμα) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα ισχύει:

Θεώρημα [1.69, Παρατ. 1.70/3.]:

α) Ένα αρχιμήδειο (δηλ. για το οποίο ισχύει η Αρχιμήδεια Ιδιότητα) διατεταγμένο σώμα $\mathbb{R}$ που πληροί το Αξίωμα του Κιβωτισμού είναι πλήρες.

β) Ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα $\mathbb{R}$ (είναι αρχιμήδειο και) πληροί το Αξίωμα του Κιβωτισμού.

<u>Σχηματικά</u> : $\mathbb{R}$ διατεταγμένο σώμα με

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αρχιμήδεια Ιδιότητα}\\ \text{Αξίωμα Κιβωτισμού}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \text{Πληρότητα}$$

<u>Απόδειξη</u> : α) Έστω $\mathbb{R}$ ένα αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα για το οποίο ισχύει το Αξίωμα του Κιβωτισμού και $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο. Συνεπώς $\exists\ \beta_1 \in \mathbb{R}$ $\underbrace{\forall x \in A \quad x \leq \beta_1}_{(1)}$. Έστω $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ με $\underbrace{\alpha_1 < x_0 \quad \text{για κάποιο } x_0 \in A}_{(2)}$. [Τέτοιο $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ υπάρχει λόγω της Αρχιμήδειας Ιδιότητας, αφού $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ $\Rightarrow -x_0 \in \mathbb{R} \underset{\text{Αρχ. Ιδ.}}{\Longrightarrow} \exists\ n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} : -x_0 < n \Leftrightarrow x_0 > -n =: \alpha_1$]

$(1),(2) \Rightarrow A \cap \underbrace{[\alpha_1, \beta_1]}_{=:\Delta_1} \neq \emptyset.$

Έστω $m_1 := \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$.

Αν $\underbrace{x \leq m_1 \ \forall x \in A}_{(3)}$ [δηλ. αν το m_1 είναι άνω φράγμα του A],

τότε $\alpha_2 := \alpha_1$, $\beta_2 := m_1$ $\underset{(2),(3)}{\Longrightarrow}$ $A \cap \underbrace{[\alpha_2, \beta_2]}_{=:\Delta_2} \neq \emptyset$, $\Delta_2 \subseteq \Delta_1$,

β_2 άνω φράγμα του A, $\beta_2-\alpha_2 = \frac{\beta_1-\alpha_1}{2}$

Αν $\underbrace{\exists\, y_0 \in A : m_1 < y_0}_{(4)}$, [δηλ. αν το m_1 δεν είναι άνω φράγμα του A],

τότε $\alpha_2 := m_1$, $\beta_2 := \beta_1$ $\underset{(1),(4)}{\Longrightarrow}$ $A \cap \underbrace{[\alpha_2, \beta_2]}_{=:\Delta_2} \neq \emptyset$, $\Delta_2 \subseteq \Delta_1$,

β_2 άνω φράγμα του A, $\beta_2-\alpha_2 = \frac{\beta_1-\alpha_1}{2}$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, δηλ. παίρνοντας $m_\nu := \frac{\alpha_\nu+\beta_\nu}{2}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ και ορίζοντας

$$\begin{cases} \alpha_{\nu+1} := \alpha_\nu, \ \beta_{\nu+1} := m_\nu, & \text{αν } m_\nu \text{ άνω φράγμα του } A \\ \alpha_{\nu+1} := m_\nu, \ \beta_{\nu+1} := \beta_\nu, & \text{αν } m_\nu \text{ όχι άνω φράγμα του } A, \end{cases}$$

ορίζουμε έναν κιβωτισμό κλειστών διαστημάτων του Cantor

$\Delta_\nu := [\alpha_\nu, \beta_\nu]$ με $\Delta_{\nu+1} \subseteq \Delta_\nu$, $A \cap \Delta_\nu \neq \emptyset$,

β_ν άνω φράγμα του A,

$$\beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1} = \frac{\beta_\nu - \alpha_\nu}{2} = \dots = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^\nu} \longrightarrow 0 \quad (*)$$

$\Longrightarrow$ $\exists\, x \in \mathbb{R} : x \in \Delta_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

Αξ. Κιβωτ.

Επίσης

i) το x είναι άνω φράγμα του A: Έστω $\exists\, \alpha \in A : \alpha > x$

$\Longrightarrow$ $\quad 0 \leq \beta_\nu - x \leq \beta_\nu - \alpha_\nu = \dfrac{\beta_1 - \alpha_1}{2^\nu} \xrightarrow[(*)]{} 0$

$x \in [\alpha_\nu, \beta_\nu] \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ για $\varepsilon := \alpha - x > 0$ $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N} : \beta_{\nu_0} - x < \varepsilon \Longleftrightarrow \beta_{\nu_0} < \alpha$,

που είναι άτοπο αφού το β_{ν_0} είναι άνω φράγμα του A.

ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha \in A : \alpha > x - \varepsilon$:

$x \in \Delta_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq x - \alpha_\nu \leq \beta_\nu - \alpha_\nu = \dfrac{\beta_1 - \alpha_1}{2^\nu} \underset{(*)}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_1 \in \mathbb{N} : x - \alpha_{\nu_1} < \varepsilon \quad (5)$

Επίσης : $A \cap \Delta_{\nu_1} \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_{\nu_1} \in A : x_{\nu_1} \geq \alpha_{\nu_1} \quad (6)$

$(5),(6) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_{\nu_1} \in A : x - x_{\nu_1} \leq x - \alpha_{\nu_1} < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_{\nu_1} \in A : x - \varepsilon < x_{\nu_1}$

Από τις i), ii) προκύπτει ότι <u>το $x \in \mathbb{R}$ που υπάρχει αξιωματικά για τον κιβωτισμό που κατασκευάσαμε</u> για δεδομένο $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A άνω φραγμένο <u>είναι το sup A</u>.

Προσοχή: Για την απόδειξη της (*) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τις ιδιότητες ενός αρχιμήδειου διατεταγμένου σώματος (το Αξ. του Κιβ. δεν χρειάζεται) και το ότι το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο: Από τις (1), (2) έχουμε ότι $\beta_1 - \alpha_1 > 0$ και άρα πρέπει και αρκεί να δείξουμε:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 \quad \frac{1}{2^\nu} < \frac{\varepsilon}{\beta_1 - \alpha_1}.$$

Αφού $\nu < 2^\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ [$\nu = 1$: $1 < 2$ που ισχύει, και από την $1 < 2^\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ (που προκύπτει από την $1 < 2 \Rightarrow 2^\nu < 2^{\nu+1}$ και την μεταβατική ιδιότητα επαγωγικά) έχουμε επαγωγικά $\nu + 1 < 2^\nu + 1 < 2^\nu + 2^\nu = 2^{\nu+1}$] και για τυχαίο $\varepsilon > 0$ $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}$: $\nu_0 > \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\varepsilon}$ (Αρχιμήδεια Ιδιότητα), έχουμε

$$\frac{1}{2^\nu} < \frac{1}{\nu} < \frac{1}{\nu_0} < \frac{\varepsilon}{\beta_1 - \alpha_1} \quad \forall \nu > \nu_0.$$

(πβ. και [Ντούγιας: §1.1, Εφ.1 §1.8 Παρ. 1.70, 2.])

β) Αφού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι ("μέχρι ισομορφίας που διατηρεί την διάταξη") το μοναδικό πλήρες διατεταγμένο σώμα (και αφού από την Πληρότητα ακολουθεί η Αρχιμήδεια Ιδιότητα, βλ. 1η Εβδομάδα/Θεωρία/ xx.11.11) η β) αποδείχθηκε με το προηγούμενο Θεώρημα [1.68], χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα [1.59], [1.49] και [1.35].

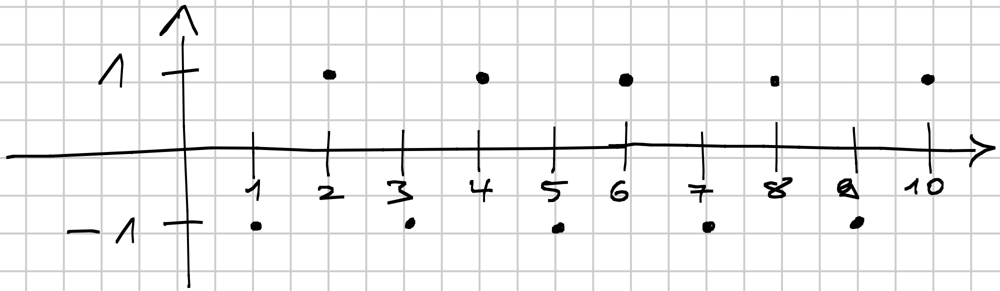
Μια αυτόνομη απόδειξη συνίσταται στην σύνθεση των επιχειρημάτων των αποδείξεων των θεωρημάτων αυτών (βλ. την απόδειξη β) ⇒ α) του Θ. 1.69 [Ντούγιας] – η οποία δεν περιλαμβάνει την μοναδικότητα που αποδεικνύεται όπως στο Θ. 1.68 [Ντούγιας] ή όπως στο Θ. [1.68] παραπάνω – και συνέκρινε με τις αποδείξεις των Θ. 1.68 και 1.59 – και για την μοναδικότητα Θ. 1.49 και Θ. 1.35).

[§ 1.10] Σημεία συσσώρευσης ακολουθίας

Ορισμός [1.75]: Ένας αριθμός $\ell \in \mathbb{R}$ λέγεται σημείο συσσώρευσης μιας ακολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, αν είναι όριο μιας υπακολουθίας της.

Παράδειγμα: Η $\alpha_\nu = (-1)^\nu$ έχει σημεία συσσώρευσης τα

$1 = \lim \alpha_{2\nu}$ και $-1 = \lim \alpha_{2\nu-1}$.



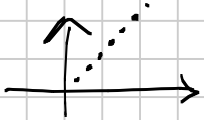
Θεώρημα [1.76] (Bolzano – Weierstrass):

Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

δηλ. ισοδύναμα

Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει τουλάχιστον μία συγκλίνουσα υπακολουθία.

Προσοχή: Το Θεώρημα δεν λέει κάτι για μη φραγμένες ακολουθίες που και αυτές μπορούν αλλά δεν είναι απαραίτητο να έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες, π.χ.

$\alpha_\nu = \nu$, $\nu \in \mathbb{N}$  δεν έχει

$\alpha_\nu = \begin{cases} \nu & \text{για } \nu = 2k \\ 1 & \text{για } \nu = 2k-1 \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}$ έχει 

Απόδειξη: Έστω x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, μια φραγμένη ακολουθία, δηλ. $\exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall \nu \in \mathbb{N}\ \underbrace{|x_\nu| \leq M}_{\iff -M \leq x_\nu \leq M}$

$\Rightarrow$ άπειρος αριθμός όρων της x_ν (όχι απαραίτητα τιμές) είναι στο $[0, M]$ ή στο $[-M, 0]$ (ή και στα δύο).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας (χ.β.τ.γ.), ας υποθέσουμε ότι οι άπειροι όροι είναι στο $[0, M]$. Θέτουμε $\alpha_1 := 0, \beta_1 := M$.

Σε ένα από τα διαστήματα $\left[\alpha_1, \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \beta_1\right]$ (ή και στα δύο) υπάρχουν πάλι άπειροι όροι της x_ν, το οποίο ονομάζουμε $[\alpha_2, \beta_2]$. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο έχουμε έναν εγκιβωτισμό κλειστών διαστημάτων $[\alpha_\nu, \beta_\nu] \supseteq [\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}]$, $\nu \in \mathbb{N}$, που

3.2/14

καθένα τους περιέχει άπειρους όρους της x_ν και (1)
έχει μήκος $\beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1} = \dfrac{\beta_\nu - \alpha_\nu}{2} = \dots = \dfrac{\beta_1 - \alpha_1}{2^\nu} \to 0$,
δηλ. είναι ένας κιβωτισμός διαστημάτων του Cantor (2)

$\Longrightarrow$ $\exists !\, \xi \in \mathbb{R} : \alpha_\nu \leq \xi \leq \beta_\nu \implies \xi = \lim \alpha_\nu = \lim \beta_\nu$

Θ. [1.68] Θ. ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

Επιλέγουμε από το διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$ έναν από τους άπειρους όρους, τον όρο x_{k_1} με $k_1 \geq 1$.
Μετά, επιλέγουμε από το διάστημα $[\alpha_2, \beta_2]$ έναν από τους απ. όρους, τον x_{k_2} με $k_2 > k_1$,
(αφού έχουμε άπειρους όρους προσπερνώντας τους k_1 πρώτους όρους της ακολ. (x_ν) έχουμε πάλι άπειρους όρους) κ.ο.κ.
Έτσι κατασκευάζουμε μια υπακολουθία $x_{k_\nu}, \nu \in \mathbb{N}$,

της x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, (με $k_\nu < k_{\nu+1}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$) για την οποία έχουμε $\underbrace{\alpha_\nu \leq x_{k_\nu} \leq \beta_\nu}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

3.2/15

$$\Longleftrightarrow \quad 0 \leq x_{k_\nu} - \alpha_\nu \leq \underbrace{\beta_\nu - \alpha_\nu}_{\xrightarrow[(1)]{} 0}$$

$$\to 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim (x_{k_\nu} - \alpha_\nu) = 0$$

Θ. ισοσυγκλ. ακολουθιών

$$\Longrightarrow \quad \lim x_{k_\nu} = \underbrace{\lim (x_{k_\nu} - \alpha_\nu)}_{=0} + \underbrace{\lim \alpha_\nu}_{\underset{(2)}{=} \xi} = \xi ,$$

άλγεβρα των ορίων και $\lim \alpha_\nu = \xi$

δηλ. το ξ είναι σημείο συσσώρευσης. Π

3.2/16

Άσκηση [1.41]: Να αποδείξετε ότι οι ακολουθίες

α) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu-7}{2\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$, β) $\alpha_\nu = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dots + \dfrac{1}{\nu^2}$, $\nu \in \mathbb{N}$

έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες.

Λύση: Σύμφωνα με το Θεώρημα των Bolzano-Weierstrass αρκεί να δείξουμε ότι οι (α_ν), (β_ν) είναι φραγμένες.

α) $$\alpha_\nu = \frac{\nu-7}{2\nu+1} < \frac{\nu}{2\nu+1} < \frac{\nu}{2\nu} = \frac{1}{2}$$ και

$$\alpha_\nu = \frac{\nu-7}{2\nu+1} > \frac{-7}{2\nu+1} \geqslant \frac{-7}{3}$$ [αφού $2\nu+1 \geqslant 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2\nu+1} \leq \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{-7}{2\nu+1} \geqslant \frac{-7}{3}$]

$\forall \nu \in \mathbb{N}$

3.2/17

β) $\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{\nu^2} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k^2}$

(η ακολουθία αυτή είναι σειρά, η αρμονική σειρά δεύτερης τάξης)

$\alpha_\nu > 0$ και $\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\nu} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{\nu} \frac{1}{k(k-1)}$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{\nu} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{\nu} \frac{1}{k-1}}_{= \sum_{k-1=1}^{\nu-1} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{1}{k}} - \sum_{k=2}^{\nu} \frac{1}{k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{\nu} \frac{1}{k}$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{\nu} = 2 - \frac{1}{\nu} < 2 \qquad \forall \nu \in \mathbb{N}$$