Εργασία 2η / Λύσεις και Λοιπές Ασκήσεις

$\boxed{E2/1}$ Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim \sqrt[\nu]{x^{\nu}+x^{-\nu}}$, $x>0$ ii) $\lim \sqrt[\nu]{\left(\frac{3}{5}\right)^{\nu}+\left(\frac{5}{6}\right)^{\nu}}$

<u>Λύση</u>: Από προηγούμενη άσκηση ($\boxed{2}$ στις Σημ. 3A/8) έχουμε $\lim \sqrt[\nu]{x^{\nu}+y^{\nu}} = y$ για $0<x<y$.

ii) Αφού $\frac{3}{5} < \frac{5}{6} \iff \frac{18}{30} < \frac{25}{30}$ έχουμε $\lim\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{\nu}+\left(\frac{5}{6}\right)^{\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{5}{6}$

i) $x=1 \Rightarrow \lim \sqrt[\nu]{1^{\nu}+1^{-\nu}} = \lim \sqrt[\nu]{2} = 1$

$x\in(0,1) \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 > x \Rightarrow \lim \sqrt[\nu]{x^{\nu}+x^{-\nu}} = \frac{1}{x}$

$x>1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 1 < x \Rightarrow \lim \sqrt[\nu]{x^{\nu}+x^{-\nu}} = x$.

$\boxed{E2/2}$ Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και το φράξιμο τις ακολουθίες [4A/2].

i) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \dots + \frac{1}{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$

ii) $\beta_\nu = \sin\frac{\pi}{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$

iii) $\gamma_\nu = \frac{\nu!\,(2\nu)!}{(3\nu)!}$, $\nu \in \mathbb{N}$

Λύση: i) $\alpha_\nu = \sum_{k=\nu}^{2\nu} \frac{1}{k} = \sum_{k-\nu=0}^{\nu} \frac{1}{k-\nu+\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k+\nu} \Rightarrow$

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \sum_{k=0}^{\nu+1} \frac{1}{k+(\nu+1)} - \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k+\nu} = \sum_{k+1=1}^{\nu+2} \frac{1}{(k+1)+\nu} - \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k+\nu} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu+2} \frac{1}{k+\nu} - \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k+\nu} = \frac{1}{2\nu+2} + \frac{1}{2\nu+1} - \frac{1}{\nu} < \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2\nu} - \frac{1}{\nu} = 0$$

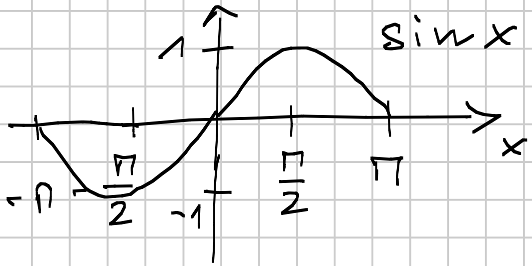
$\Rightarrow$ (α_ν) είναι φθίνουσα $\left(\Rightarrow \alpha_\nu \leq \alpha_1 = \frac{3}{2} \ \forall \nu \in \mathbb{N}\right)$ και $\alpha_\nu > 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

$\left[\Rightarrow \ \exists \lim \alpha_\nu \in \left[0, \frac{3}{2}\right)\right].$

ii) $\beta_\nu = \sin\frac{\pi}{2\nu}$, $\nu\in\mathbb{N} \Longrightarrow |\beta_\nu|\le 1 \quad \forall \nu\in\mathbb{N}$

Πιο αναλυτικά $\frac{\pi}{2\nu}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right] \ \forall\nu\in\mathbb{N} \Longrightarrow \beta_\nu\in(0,1]$

$\sin\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = (0,1]$



Αφού $\sin x < \sin y$ για $x<y$, $x,y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

και $\frac{\pi}{2\nu+1} < \frac{\pi}{2\nu}$ έχουμε $\beta_{\nu+1} < \beta_\nu$ $\forall\nu\in\mathbb{N}$,

δηλ. η (β_ν) είναι γνησίως φθίνουσα.

$\left(\Longrightarrow \exists \lim\beta_\nu\in[0,1]\right.$ και όπως θα δούμε αργότερα $\left.\lim\beta_\nu = 0\right)$

iii) $\gamma_\nu = \frac{\nu!\,(2\nu)!}{(3\nu)!} \Longrightarrow \gamma_{\nu+1} = \frac{(\nu+1)!\,(2\nu+2)!}{(3\nu+3)!} =$

$$= \frac{(\nu+1)\,\nu!\,(2\nu+2)(2\nu+1)(2\nu)!}{(3\nu+3)(3\nu+2)(3\nu+1)(3\nu)!} = \underbrace{\frac{(\nu+1)(2\nu+2)(2\nu+1)}{(3\nu+3)(3\nu+2)(3\nu+1)}}_{<\frac{1}{3}<1}\gamma_\nu$$

$\Longrightarrow (\gamma_\nu)$ φθίνουσα, $\gamma_1 = \frac{2}{3}$, $\gamma_\nu>0$ $\left[\Longrightarrow \exists\lim\gamma_\nu\in\left[0,\frac{2}{3}\right]\right]$

$\boxed{\text{Ε2/3}}$ Δίνονται οι ακολουθίες (α_ν), (β_ν) με (α_ν) αύξουσα, (β_ν) φθίνουσα και $\lim(\beta_\nu-\alpha_\nu)=0$. Να αποδείξετε ότι η $(\beta_\nu-\alpha_\nu)$ είναι φθίνουσα, μη αρνητική και $\lim\beta_\nu=\lim\alpha_\nu$

<u>Λύση</u>: (α_ν) αύξουσα $\Rightarrow$ $(-\alpha_\nu)$ φθίνουσα

$[\Leftrightarrow \alpha_{\nu+1}\geq\alpha_\nu\ \forall\nu\in\mathbb{N}]$ $[\Leftrightarrow -\alpha_{\nu+1}\leq-\alpha_\nu\ \forall\nu\in\mathbb{N}]$

(β_ν) φθίνουσα, $(-\alpha_\nu)$ φθίνουσα $\Rightarrow$ $(\beta_\nu-\alpha_\nu)$ φθίνουσα

$[\ \beta_\nu\geq\beta_{\nu+1},\ -\alpha_\nu\geq-\alpha_{\nu+1} \Rightarrow \beta_\nu-\alpha_\nu\geq\beta_{\nu+1}-\alpha_{\nu+1}\ \forall\nu\in\mathbb{N}]$

$\left.\begin{array}{l}\beta_\nu-\alpha_\nu\to0 \Rightarrow (\beta_\nu-\alpha_\nu)\text{ φραγμένη}\\ (\beta_\nu-\alpha_\nu)\text{ φθίνουσα}\end{array}\right\}\Rightarrow \underbrace{\lim(\beta_\nu-\alpha_\nu)}_{=0}=\inf\{\beta_\nu-\alpha_\nu:\nu\in\mathbb{N}\}$

$\Rightarrow \beta_\nu-\alpha_\nu\geq0\ \forall\nu\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \alpha_\nu\leq\beta_\nu\ \forall\nu\in\mathbb{N} \xRightarrow[(\alpha_\nu)\text{ αυξ},(\beta_\nu)\text{ φθ.}]{}$

$\alpha_1\leq\alpha_2\leq\dots\leq\alpha_\nu\leq\beta_\nu\leq\dots\leq\beta_2\leq\beta_1 \Rightarrow (\alpha_\nu)$ αυξ. και φρ., (β_ν) φθ. και φρ.

$\Rightarrow \exists\lim\alpha_\nu,\lim\beta_\nu\in\mathbb{R} \xRightarrow[\lim(\beta_\nu-\alpha_\nu)=0]{} \lim\beta_\nu=\underbrace{\lim(\beta_\nu-\alpha_\nu)}_{=0}+\lim\alpha_\nu=\lim\alpha_\nu$ $\square$

$\boxed{E2/4}$ $A = \{ x_\nu ,\ \nu \in \mathbb{N} : \ x_1 = 2 ,\ \underbrace{2 x_\nu x_{\nu+1} = x_\nu^2 + 2}_{(*)} \}$, $\inf A =$;

Λύση: $x_\nu \in [1,2] \ \forall \nu \in \mathbb{N}$: $x_1 = 2$, $x_{\nu+1} = \dfrac{x_\nu^2 + 2}{2x_\nu} = \dfrac{x_\nu}{2} + \dfrac{1}{x_\nu}$

και άρα αν για τυχαίο $\nu \in \mathbb{N}$ $x_\nu \in [1,2]$ τότε $\dfrac{x_\nu}{2} \in [\frac{1}{2}, 1]$ και

$\dfrac{1}{x_\nu} \in [\frac{1}{2}, 1]$ και άρα $x_{\nu+1} = \dfrac{x_\nu}{2} + \dfrac{1}{x_\nu} \in [1,2]$ (το οποίο είναι

μια πολλή χονδρική εκτίμηση (coarse estimate) αφού η

$f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$, $x \in [1,2]$ έχει ελάχιστο στο $x = \sqrt{2}$)

Η (x_ν) είναι φθίνουσα: $x_{\nu+1} - x_\nu = \dfrac{2 - x_\nu^2}{2x_\nu} \leq 0$ αφού $x_1 = 2$

και $x_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(x_\nu + \dfrac{2}{x_\nu}\right) \geq 2 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ [$\alpha, \beta \geq 0$: $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \geq \sqrt{\alpha\beta}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2 \geq \alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$ που προφανώς ισχύει].

Άρα $\exists \lim x_\nu = \inf A \geq 1$, που από την $(*)$ λόγω άλγεβρας ορίων

είναι το $2(\lim x_\nu)(\lim x_{\nu+1}) = 2(\lim x_\nu)^2 = (\lim x_\nu)^2 + 2 \Rightarrow \lim x_\nu = \inf A = \sqrt{2}$

[Παρατήρηση: Η άσκηση είναι η [Nτ., 1.26] (βλ. και σημ. 3.1/14) με $\alpha_1 = k = 2$.]

4Α/16

$\boxed{E2/5}$ Δείξτε: Τα διαστήματα $\Delta_\nu := [x_\nu, y_\nu]$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$

με $\quad x_\nu = \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{1}{k} - \log \nu$, $\quad y_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} - \log \nu$

αποτελούν κιβωτισμό κλειστών διαστημάτων του Cantor.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu < e < \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$ χωρίς να την αποδείξετε.

Απόδειξη: $\quad 0 < y_\nu - x_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0$,

$$x_{\nu+1} = x_\nu + \frac{1}{\nu} + \log \nu - \log(\nu+1)$$

$$y_{\nu+1} = y_\nu + \frac{1}{\nu+1} + \log \nu - \log(\nu+1),$$

όπου $\boxed{\log \alpha - \log \beta = \log \frac{\alpha}{\beta} \quad \forall \alpha, \beta > 0}$ $\left(\Rightarrow \log \frac{1}{\alpha} = \overbrace{\log 1}^{=0} - \log \alpha \ \forall \alpha > 0 \right)$

$\left[\Leftarrow \quad e^{\log \alpha - \log \beta} = e^{\log \alpha} e^{-\log \beta} = \frac{\alpha}{\beta} = e^{\log \frac{\alpha}{\beta}} \right]$

Θέλουμε να δείξουμε : $x_{\nu+1} - x_\nu \geq 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq 2,$

$\underbrace{}_{= -\log\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)} \quad y_{\nu+1} - y_\nu \leq 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq 2,$

δηλ. $\quad \frac{1}{\nu} + \log \frac{\nu}{\nu+1} \geq 0 \quad$ και $\quad \frac{1}{\nu+1} + \underbrace{\log \frac{\nu}{\nu+1}}_{= -\log\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)} \leq 0$

Από την υπόδειξη έχουμε :

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu < e < \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \log\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\right] < \log e < \log\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}\right]$$

$\boxed{\log : (0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ γνησίως αύξουσα}}$ (ακόμα δεν αποδείχθηκε)

$$\Longleftrightarrow \quad \nu \log\left(1+\frac{1}{\nu}\right) < 1 < (\nu+1) \log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)$$

[όπου $\boxed{\log(\alpha^\beta) = \beta \log \alpha \quad \forall\ \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}}$, αφού $e^{\log(\alpha^\beta)} = \alpha^\beta = (e^{\log \alpha})^\beta = e^{\beta \log \alpha}$]

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\nu+1} < \log\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) < \frac{1}{\nu}$$

$\square$

Λοιπές Ασκήσεις:

1) Θεώρημα [Ντ., 2.18] : βλ. Σημ. 4.2/15
2) Εφαρμογή [Ντ., §1.9/3] : βλ. Σημ. 4.1/8–10
3) Εφαρμογή [Ντ., §1.6/1] :

$$\boxed{\alpha_\nu \neq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \longrightarrow k < 1 \implies \alpha_\nu \to 0}$$

Απόδειξη: Αφού $k \in [0,1)$, $\exists\, \lambda \in (k,1)$ $\left[\text{π.χ. } \lambda = \frac{k+1}{2}\right]$.

$\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \to k \implies$ Για $\varepsilon := \lambda - k > 0$ $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}$ $\forall \nu \geq \nu_0$: $\left|\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| - k\right| < \lambda - k$

$\implies \forall \nu \geq \nu_0 \quad \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \left|\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| - k + k\right| \leq \left|\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| - k\right| + |k| < \lambda - k + k = \lambda$

$\implies \forall \nu \in \mathbb{N}: \quad |\alpha_\nu| = \underbrace{\left|\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}}\right|}_{<\lambda} \underbrace{\left|\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-2}}\right|}_{<\lambda} \cdots \underbrace{\left|\frac{\alpha_{\nu_0+1}}{\alpha_{\nu_0}}\right|}_{<\lambda} |\alpha_{\nu_0}| < \lambda^{\nu-\nu_0} |\alpha_{\nu_0}| = \lambda^\nu \frac{|\alpha_{\nu_0}|}{\lambda^{\nu_0}}$

Αφού $\lambda^\nu \to 0$ [Παραδ. 1.52], από το Θ. ισοσυγκλ. ακ. [Θ.1.49] έχουμε $|\alpha_\nu| \to 0 \iff \alpha_\nu \to 0$ $\square$

4) **Θεώρημα** [2.26]: Η **αρμονική σειρά ρ-τάξης**

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\rho}} = \begin{cases} \infty & \text{για } \rho \leq 1 \\ \text{συγκλίνει} & \text{για } \rho > 1 \end{cases}}$$

Απόδειξη:

$$\boxed{\rho \leq 1} \Rightarrow \nu^{\rho} \leq \nu \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{\nu} \leq \frac{1}{\nu^{\rho}} \\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \infty \end{array}\right\} \underset{[2.21]}{\Longrightarrow} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\rho}} = \infty$$

$\boxed{\rho > 1}$ Αφού $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^{\rho}} > 0 \quad \forall \rho \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{N}$, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sigma_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{\kappa^{\rho}}$ είναι αύξουσα. Έτσι, αφού $2^{\nu} = (1+1)^{\nu} \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1+\nu \Longleftrightarrow \nu \leq 2^{\nu}-1 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$, είναι $\sigma_\nu \leq \sigma_{2^{\nu}-1}$.

Επίσης $\sigma_{2^\nu-1} = \frac{1}{1^\rho} + \left(\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{3^\rho}\right) + \left(\frac{1}{4^\rho}+\frac{1}{5^\rho}+\frac{1}{6^\rho}+\frac{1}{7^\rho}\right) +$

$$+\left(\frac{1}{8^\rho}+\dots+\frac{1}{15^\rho}\right)+\dots+\left(\frac{1}{(2^{\nu-1})^\rho}+\dots+\frac{1}{(2^\nu-1)^\rho}\right)$$

$$< 1 + 2\,\frac{1}{2^\rho} + 4\,\frac{1}{4^\rho} + 8\,\frac{1}{8^\rho} + \dots + (2^\nu-2^{\nu-1})\frac{1}{(2^{\nu-1})^\rho}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\rho-1}} + \frac{1}{4^{\rho-1}} + \frac{1}{8^{\rho-1}} + \dots + \frac{1}{(2^{\nu-1})^{\rho-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\rho-1}} + \left(\frac{1}{2^{\rho-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\rho-1}}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2^{\rho-1}}\right)^{\nu-1}$$

$$\underset{(*)}{=} \frac{1-\left(\frac{1}{2^{\rho-1}}\right)^\nu}{1-\frac{1}{2^{\rho-1}}} < \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\rho-1}}}$$

$\left[(*): \sum_{k=0}^{\nu-1} w^k = \sum_{k+1=1}^{\nu} w^{(k+1)-1} = \sum_{k=1}^{\nu} w^{k-1} = \frac{1-w^\nu}{1-w},\ w\neq 1\right]$

και συνεπώς η (σ_ν) συγκλίνει και $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^\rho} = \lim \sigma_\nu \leq \frac{2^{\rho-1}}{2^{\rho-1}-1}$.]

4ΑΙΜ

5) Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{\nu^3+1}$:

Παρατηρούμε ότι με $\alpha_\nu = \frac{\nu^2}{\nu^3+1} = \frac{1}{\nu+\frac{1}{\nu^2}}$ και $\beta_\nu = \frac{1}{\nu}$ έχουμε

$$\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \nu\alpha_\nu = \frac{\nu^3}{\nu^3+1} = \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{\nu^3}}_{\to 0}} \longrightarrow 1$$

και, αφού $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \infty$, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης (Θ. [2.24]) έχουμε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{\nu^3+1} = \infty$.

6) Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\nu^5}}{\nu^2\sqrt{\nu^3}}$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\nu^5}}{\nu^2\sqrt{\nu^3}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{\frac{5}{3}}}{\nu^2\nu^{\frac{3}{2}}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\frac{7}{2}-\frac{5}{3}}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\frac{11}{6}}} < \infty,$$

ως αρμονική σειρά p-τάξης με $p = \frac{11}{6} > 1$.

(βλ. Θ. [2.26], δηλ. Άσκηση 4)).