[§ 1.11] Ακολουθίες Cauchy

Notiztitel 24.11.2011

Ορισμός [1.77]: Μια ακολουθία (α_ν) λέγεται ακολουθία Cauchy (ή βασική ακολουθία): $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \boxed{\forall \nu, \mu > \nu_0} : |\alpha_\nu - \alpha_\mu| < \varepsilon$

[$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \boxed{\forall \nu > \nu_0 \; \forall k \in \mathbb{N}} : |\alpha_{\nu+k} - \alpha_\nu| < \varepsilon$]

Θεώρημα [1.79] (Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy)

$$\boxed{(\alpha_\nu) \text{ συγκλίνει} \Longleftrightarrow (\alpha_\nu) \text{ είναι ακολουθία Cauchy}}$$

Απόδειξη: "$\Rightarrow$": Έστω ότι η (α_ν) συγκλίνει.

$\Longrightarrow \exists \ell \in \mathbb{R} : \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \forall \nu > \nu_0 \; |\alpha_\nu - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu,\mu > \nu_0 : \ |\alpha_\nu - \alpha_\mu| = |\alpha_\nu - \ell + \ell - \alpha_\mu|$

$\leq |\alpha_\nu - \ell| + |\ell - \alpha_\mu| = |\alpha_\nu - \ell| + |\alpha_\mu - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow$ (α_ν) είναι ακολουθία Cauchy.

"$\Leftarrow$": Έστω (α_ν) μια ακολουθία Cauchy, δηλ.

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu,\mu > \nu_0 \ |\alpha_\nu - \alpha_\mu| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Για $\varepsilon = 1$: $\exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu,\mu > \nu_0 \ |\alpha_\nu - \alpha_\mu| < 1$

$\Rightarrow$ Για τυχαίο $\mu_1 > \nu_0$: $\forall \nu > \nu_0$: $|\alpha_\nu - \alpha_{\mu_1}| < 1$

$\Rightarrow \ \forall \nu > \nu_0 : \ |\alpha_\nu| = |\alpha_\nu - \alpha_{\mu_1} + \alpha_{\mu_1}| \leq |\alpha_\nu - \alpha_{\mu_1}| + |\alpha_{\mu_1}| < 1 + |\alpha_{\mu_1}|$

$\Rightarrow \ \forall \nu \in \mathbb{N} : \ |\alpha_\nu| \leq M = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{\nu_0}|, 1+|\alpha_{\mu_1}|\}$,

δηλ. η (α_ν) είναι φραγμένη.

$\Longrightarrow$ Bolzano - Weierstrass: $\exists$ υπακολουθία (α_{k_ν}) της (α_ν) : $\alpha_{k_\nu} \to \ell \in \mathbb{R}$,

δηλ. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_1 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_1 \ |\alpha_{k_\nu} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. (1)

Από την άλλη, αφού η (α_ν) είναι ακολουθία Cauchy,

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_2 \in \mathbb{N} \ \forall \nu, \mu \geq \nu_2 \ |\alpha_\nu - \alpha_\mu| < \frac{\varepsilon}{2}$, (2)

και αφού $k_\nu \geq \nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ (βλ. απόδειξη Θ. [1.43]),

συνεπάγεται ειδικότερα από την (2) ότι

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_2 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \geq \nu_2 \ |\alpha_\nu - \alpha_{k_\nu}| < \frac{\varepsilon}{2}$ (3)

Άρα, από τις (1) και (3) ακολουθεί ότι

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_3 := \max\{\nu_1, \nu_2\} \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_3$:

$|\alpha_\nu - \ell| \leq |\alpha_\nu - \alpha_{k_\nu}| + |\alpha_{k_\nu} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, δηλ. $\alpha_\nu \to \ell$ $\square$

4.1/4

Άσκηση [§1.11 Εφ. 1.α)] : Να αποδείξετε ότι η $\alpha_\nu = \frac{\nu+1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Λύση: $|\alpha_\nu - \alpha_\mu| = \left|\frac{\nu+1}{\nu} - \frac{\mu+1}{\mu}\right| = \left|1 + \frac{1}{\nu} - \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\right|$

$= \left|\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu}\right| \leq \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} < \frac{2}{\nu_0} \quad \forall\ \nu,\mu > \nu_0 \quad (1)$

Αφού $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N} : \nu_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ (Αρχιμήδεια Ιδιότητα)

$\underset{(1)}{\Longrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ \nu,\mu > \nu_0\ |\alpha_\nu - \alpha_\mu| < \frac{2}{\nu_0} < \varepsilon$,

δηλ. η (α_ν) είναι ακολουθία Cauchy.

Λήμμα [A.1.45]: Κάθε ακολουθία (α_ν) με

$$|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu| < c^\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \text{όπου } c \in (0,1) \qquad (1)$$

είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη: $$|\alpha_{\nu+k} - \alpha_\nu| \leq |\alpha_{\nu+k} - \alpha_{\nu+k-1}| + \dots + |\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu|$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} |\alpha_{\nu+n+1} - \alpha_{\nu+n}| \underset{(1)}{\leq} \sum_{n=0}^{k-1} c^{\nu+n} = c^\nu \sum_{n=0}^{k-1} c^n \qquad (2)$$

όπου $$S_k := \sum_{n=0}^{k-1} c^n = 1 + c + c^2 + \dots + c^{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad c S_k = c + c^2 + c^3 + \dots + c^k$$

$$\Rightarrow \quad (1-c) S_k = 1 - c^k \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_k := \sum_{n=0}^{k-1} c^n = \frac{1-c^k}{1-c}, \; c \neq 1}$$

Άρα, από την (2) έχουμε

$$|\alpha_{\nu+k}-\alpha_\nu| \leq c^\nu \frac{1-c^k}{1-c} \underset{\substack{\uparrow \\ c\in(0,1)\Rightarrow c^k\in(0,1)\ \forall k\in\mathbb{N}}}{<} c^\nu \frac{1}{1-c} \quad \boxed{\forall k\in\mathbb{N}} \qquad (3)$$

και επειδή για $|c|<1$: $\frac{c^\nu}{1-c}\to 0$, δηλ. $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\nu_0\in\mathbb{N}\ \forall\nu>\nu_0: \frac{c^\nu}{1-c}<\varepsilon$

έχουμε από την (3)

$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\nu_0\in\mathbb{N}\ \forall\nu>\nu_0\ \forall k\in\mathbb{N}: |\alpha_{\nu+k}-\alpha_\nu|<\varepsilon$,

δηλ. η (α_ν) είναι ακολουθία Cauchy. $\square$

[§1.9] Απειριζόμενες ακολουθίες

Notiztitel 25.11.2011

Ορισμός [1.71]: Μια ακολουθία (α_ν) τείνει στο ∞ $(-\infty)$ [ή έχει όριο το ∞ $(-\infty)$] (και γράφουμε: $\alpha_\nu \to \infty$ $(-\infty)$ ή $\lim \alpha_\nu = \infty$ $(-\infty)$)

$$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu>\nu_0 : \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Big[\underset{\alpha_\nu>0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\alpha_\nu} < \varepsilon\Big]$$

$$\Big(\alpha_\nu < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \Big[\underset{\alpha_\nu<0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{-\alpha_\nu} < \varepsilon\Big]\Big)$$

$$\Big[\underset{\alpha_\nu\neq 0}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu>\nu_0 : 0 < \frac{1}{\alpha_\nu} \to 0 \quad \Big(0 > \frac{1}{\alpha_\nu} \to 0\Big)\Big]$$

$$\Big[\Longleftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu>\nu_0 : \alpha_\nu > K \quad (\alpha_\nu < K)\Big]$$

4.1/8

Θεώρημα [1.72]: Έστω $\alpha_\nu \leq \beta_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$. Τότε

i) $\alpha_\nu \to \infty \Rightarrow \beta_\nu \to \infty$

ii) $\beta_\nu \to -\infty \Rightarrow \alpha_\nu \to -\infty$

Απόδειξη:

i) $\alpha_\nu \to \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 : \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon}$

$\underset{\beta_\nu \geq \alpha_\nu}{\Longrightarrow}$ ——— " ——— $: \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \iff \beta_\nu \to \infty$

ii) $\beta_\nu \to -\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 : \beta_\nu < -\frac{1}{\varepsilon}$

$\underset{\alpha_\nu \leq \beta_\nu}{\Longrightarrow}$ ——— " ——— $: \alpha_\nu < -\frac{1}{\varepsilon} \iff \alpha_\nu \to -\infty$

$\square$

Θεώρημα [1.73] Έστω $\alpha_\nu, \beta_\nu > 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \to \ell > 0$

Τότε: $\alpha_\nu \to \infty \iff \beta_\nu \to \infty$

Απόδειξη: $\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 : \left| \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} - \ell \right| < \varepsilon$

$$\underset{\varepsilon := \frac{1}{2}\ell}{\Longrightarrow} \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 : \underbrace{-\frac{1}{2}\ell < \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} - \ell < \frac{1}{2}\ell}$$

$$\iff \frac{1}{2}\ell < \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} < \frac{3}{2}\ell$$

$$\iff \frac{1}{2}\ell\beta_\nu \underset{(1)}{<} \alpha_\nu \underset{(2)}{<} \frac{3}{2}\ell\beta_\nu$$

Έτσι

$$\alpha_\nu \to \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_1 > \nu_0 \ \forall \nu > \nu_1 : \alpha_\nu > \frac{3}{2}\ell \frac{1}{\varepsilon} \ \boxed{\underset{(2)}{\Longrightarrow}} \ \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\iff \beta_\nu \to \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_2 > \nu_0 \ \forall \nu > \nu_2 : \beta_\nu > \frac{1}{\frac{1}{2}\ell}\frac{1}{\varepsilon} \ \boxed{\underset{(1)}{\Longrightarrow}} \ \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon}$$

$\square$

Άσκηση [1.38] : $\alpha_\nu, \beta_\nu > 0$, $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \to \ell$. Δείξτε ότι : (4.1/10)

i) αν $\ell = 0$ τότε : α) $\alpha_\nu \to \infty \Rightarrow \beta_\nu \to \infty$

β) (β_ν) (άνω) φραγμένη $\Rightarrow \alpha_\nu \to 0$

ii) αν $\ell \text{"="} \infty$ τότε : α) $\beta_\nu \to \infty \Rightarrow \alpha_\nu \to \infty$

β) (α_ν) (άνω) φραγμένη $\Rightarrow \beta_\nu \to 0$

Απόδειξη :

i) $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \to 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 : \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} < \varepsilon \quad (1)$

α) $\alpha_\nu \to \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_1 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_1 : \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \quad (2)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_2 (:= \max\{\nu_0, \nu_1\}) \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_2 : \beta_\nu \boxed{\underset{(1)}{>}} \frac{\alpha_\nu}{\varepsilon} \boxed{\underset{(2)}{>}} \frac{1}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow \beta_\nu \to \infty$

$\beta)$ $\exists\, M>0: \beta_\nu \in (0, M)\ \forall \nu \in \mathbb{N}$ (3)

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu>\nu_0: \alpha_\nu \boxed{\underset{(1)}{<}} \varepsilon \beta_\nu \boxed{\underset{(3)}{<}} \varepsilon M \Leftrightarrow \alpha_\nu \to \infty$

iii) $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \to \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu>\nu_0: \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} > \frac{1}{\varepsilon}$ (4)

$\alpha)$ $\beta_\nu \to \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\, \nu_1 \in \mathbb{N}\ \forall \nu>\nu_1: \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon}$ (5)

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\, \nu_2\left(:=\max\{\nu_0, \nu_1\}\right) \in \mathbb{N}\ \forall \nu>\nu_2: \alpha_\nu \boxed{\underset{(4)}{>}} \beta_\nu \frac{1}{\varepsilon} \boxed{\underset{(5)}{>}} \frac{1}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow \alpha_\nu \to \infty$

$\beta)$ $\exists\, M>0: \alpha_\nu \in (0, M)\ \forall \nu \in \mathbb{N}$ (6)

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu>\nu_0: \beta_\nu \boxed{\underset{(4)}{<}} \varepsilon \alpha_\nu \boxed{\underset{(6)}{<}} \varepsilon M \Leftrightarrow \beta_\nu \to 0$

Παράδειγμα [1.74] : Δείξτε : $\boxed{\alpha > 1 \Rightarrow \alpha^{\nu} \to \infty}$

Απόδειξη : $\alpha > 1 \iff \alpha = 1 + \beta,\ \beta > 0$

$$\Rightarrow \quad \alpha^{\nu} = (1+\beta)^{\nu} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ανισότητα Bernoulli}}}{\geq} 1 + \nu\beta > \nu\beta \xrightarrow[(*)]{} \infty \underset{\Theta.[1.72(i)]}{\Longrightarrow} \alpha^{\nu} \to \infty$$

[(*): Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα $(:\iff \forall x \in \mathbb{R}\ \exists \nu \in \mathbb{N} : \nu > x)$ έχουμε $\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \nu > \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon\beta} \underset{\beta>0}{\Longrightarrow} \nu\beta > \frac{1}{\varepsilon}$

$\iff \nu\beta \to \infty$]

Εφαρμογή [§1.9/1] Να βρεθεί το $\lim \sqrt[\nu]{4^{10}+r^{\nu}}$ για $r \geq 0$.

Λύση:

$0 \leq r \leq 1$: (Από τα Αξ. Διάτ. συνεπάγεται)

$\forall \nu \in \mathbb{N}: \ 0 \leq r \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r^{\nu} \leq 1^{\nu} = 1 \Rightarrow 4^{10} \leq 4^{10}+r^{\nu} \leq 4^{10}+1$

$$\left.\Rightarrow \underbrace{\sqrt[\nu]{4^{10}}}_{\to 1} \leq \sqrt[\nu]{4^{10}+r^{\nu}} \leq \underbrace{\sqrt[\nu]{4^{10}+1}}_{\to 1} \right\} \underset{\text{Θ. ισοσ. ακ.}}{\Longrightarrow} \lim \sqrt[\nu]{4^{10}+r^{\nu}} = 1$$

$$\boxed{\alpha > 0 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} \to 1}$$ [1.53]

$r > 1$: $r > 1 \underset{[1.74]}{\Longrightarrow} r^{\nu} \to \infty \Rightarrow \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : r^{\nu} > 4^{10}$

$$\left.\Rightarrow r^{\nu} < 4^{10}+r^{\nu} < 2r^{\nu} \Rightarrow \underbrace{r}_{\to r} < \sqrt[\nu]{4^{10}+r^{\nu}} < \underbrace{\Big(\underbrace{\sqrt[\nu]{2}}_{\to 1}\Big) r}_{\to r} \right\} \underset{\text{ισοσ. ακ.}}{\Longrightarrow} \lim \sqrt[\nu]{4^{10}+r^{\nu}} = r$$

<u>Εφαρμογή</u> [§ 1.9|3] Γνωρίζοντας ότι το $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \to e \in \mathbb{R}$ (<u>αριθμός του Euler</u>)* αποδείξτε:

α) $k_\nu \in \mathbb{N}\ \forall \nu \in \mathbb{N}$, $k_\nu \to \infty \Rightarrow \left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu} \to e$

β) $x_\nu \in \mathbb{R}\ \forall \nu \in \mathbb{N}$, $x_\nu \to \infty \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu} \to e$

γ) $y_\nu \in \mathbb{R}\ \forall \nu \in \mathbb{N}$, $y_\nu \to -\infty \Rightarrow \left(1+\frac{1}{y_\nu}\right)^{y_\nu} \to e$

<u>Απόδειξη</u>: α) Έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$.

Αφού $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \to e$, $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \left|\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} - e\right| < \varepsilon$. (1)

Επίσης, αφού $k_\nu \to \infty$, $\exists\, \nu_1 > \nu_0\ \forall \nu > \nu_1 : k_\nu > \nu_0$. (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε $\forall \nu > \nu_1 : \left|\left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu} - e\right| \varepsilon$.

Αφού αυτό είναι τυχαίο $\forall \varepsilon > 0$ έχουμε $\left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu} \to e$

[Αν η (k_ν) ήταν <u>γνησίως αύξουσα</u> ($\underset{k_\nu \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} k_\nu \to \infty$), τότε $\left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu} \to e$ ως υπακολουθία (Θ. [1.45])] β) Για $x \in \mathbb{R}$ ο αριθμός $[x] \in \mathbb{Z}$ με $[x] \leq x < [x]+1$ (3)

ονομάζεται <u>ακέραιο μέρος του x</u> ($\exists!$, βλ. [Νε., Θ. 1.5])

(π.χ. $\underset{3,14\ldots}{[\pi]} = 3$, $x=-15$, $[x]=-15$, $\underset{2,718\ldots}{[e]} = 2$)

Αφού $x_\nu \to \infty$, $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu > \nu_0 : x_\nu \geq 1 \Rightarrow [x_\nu] \geq 1$

$\Rightarrow k_\nu := [x_\nu] \in \mathbb{N}$ και αφού $x_\nu \to \infty \Rightarrow x_\nu - 1 \to \infty$

$\left[\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : x_\nu > \frac{1}{\varepsilon} + 1\right]$ έχουμε από την (3)

$x_\nu - 1 \leq k_\nu \to \infty$ και $\frac{1}{k_\nu + 1} < \frac{1}{x_\nu} \leq \frac{1}{k_\nu} \Rightarrow$

$$\left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{k_\nu} \boxed{\leq} \left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{x_\nu} \boxed{<} \left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu} \boxed{\leq} \left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{x_\nu} \boxed{<} \left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu+1} \quad (4)$$

[οι $\boxed{f(x) = x^\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \geq 0$ και $\boxed{g(x) = \alpha^x}$, $\alpha > 1$, $x > 0$

είναι γνησίως αύξουσες (δεν το έχουμε αποδείξει ακόμα!)]

4.1/16

Από την α) έχουμε [με $k_\nu \to \infty \Rightarrow \begin{cases} k_\nu + 1 \to \infty \Rightarrow \frac{1}{k_\nu+1} \to 0 \\ \frac{1}{k_\nu} \to 0 \end{cases}$]

$$\left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{k_\nu} = \left(1+\frac{1}{k_\nu+1}\right)^{k_\nu+1} \frac{1}{1+\frac{1}{k_\nu+1}} \xrightarrow{} e$$

άλγεβρα ορίων

και $\left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu+1} = \left(1+\frac{1}{k_\nu}\right)^{k_\nu}\left(1+\frac{1}{k_\nu}\right) \xrightarrow{''} e$

και άρα από την (4) και το Θεώρημα Ισοσυγκλ. Ακ. $\left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu} \to e$

γ) $y_\nu \to -\infty \iff -y_\nu \to \infty$ [$\forall \varepsilon>0 \; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \forall \nu>\nu_0 : y_\nu < -\frac{1}{\varepsilon} \iff -y_\nu > \frac{1}{\varepsilon}$]

$\Longrightarrow$ $x_\nu := -y_\nu - 1 \to \infty$ [$\forall \varepsilon>0 \; \exists \nu_1 \in \mathbb{N} \; \forall \nu>\nu_1 : -y_\nu > \frac{1}{\varepsilon}+1$]

$$\Longrightarrow \left(1+\frac{1}{y_\nu}\right)^{y_\nu} = \left(1+\frac{1}{-x_\nu-1}\right)^{-x_\nu-1} = \left(\frac{x_\nu}{x_\nu+1}\right)^{-x_\nu-1} = \left(\frac{x_\nu+1}{x_\nu}\right)^{x_\nu+1} =$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu}}_{\xrightarrow{\beta)} e} \underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{1}{x_\nu}}_{\to 0}\right)}_{\to 1} \Bigg\} \underset{\text{άλγεβρα ορίων}}{\Longrightarrow} \left(1+\frac{1}{y_\nu}\right)^{y_\nu} \to e$$

$\square$

4.1/17

[$*$: Ο αριθμός του Euler e μπορεί να οριστεί ως το (μοναδικό) όριο της $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Αυτό υπάρχει επειδή η (α_ν) είναι (γνησίως) αύξουσα και άνω φραγμένη:

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \left(1-\frac{1}{(\nu+1)^2}\right)^\nu \frac{\nu+2}{\nu+1} \underset{\substack{\text{ανισότητα} \\ \text{Bernoulli}}}{\geq} \left(1-\frac{\nu}{(\nu+1)^2}\right)\frac{\nu+2}{\nu+1} = 1+\frac{1}{(\nu+1)^3} > 1$$

και από το Διώνυμο του Newton: $(\alpha+\beta)^\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} \alpha^{\nu-\mu}\beta^\mu$, με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\underbrace{\binom{\nu}{\mu}}_{\text{"ν από μ"}} := \frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}$, $\underbrace{\nu!}_{\text{"ν παραγοντικό"}} := \nu(\nu-1)\cdots 2\cdot 1$, $0! := 1$ [απόδειξη με επαγωγή]

έχουμε $\alpha_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}\frac{1}{\nu^\mu}$ με $\binom{\nu}{\mu}\frac{1}{\nu^\mu} = \frac{1}{\mu!}\,\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\dots(\nu-\mu+1)}{\nu\cdot\nu\cdot\nu\cdots\nu} =$

$= \frac{1}{\mu!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu-1}{\nu}\right) \leq \frac{1}{\mu!}$ και $\mu! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots\mu \geq \underbrace{1\cdot 2\cdot 2\cdots 2}_{=2^{\mu-1}}$

για $\nu,\mu\in\mathbb{N}$ και αφού $\boxed{\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\alpha^\mu = \frac{1-\alpha^\nu}{1-\alpha} \text{ για } \alpha\neq 1}$ έχουμε για $\nu\in\mathbb{N}$

$$\alpha_\nu = 1+\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{\mu!} \leq 1+\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{2^{\mu-1}} = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^\nu}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3,$$]

<u>Άσκηση</u> [1.39 α)]: Να υπολογίσετε το όριο $\lim\left(2+\frac{3}{\nu}\right)^{3\nu}\left(2+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$. 4.1.18

<u>Λύση</u>:

$$\alpha_\nu = \underbrace{\underbrace{\left(2+\frac{3}{\nu}\right)}_{>1}{}^{3\nu}}_{>1}\underbrace{\left(2+\frac{1}{\nu}\right)}_{>2}{}^{\nu} > 2^\nu \longrightarrow \infty \implies \alpha_\nu \to \infty$$

[Πιο συγκεκριμένα: $\alpha_\nu = 2^{3\nu}\left(1+\frac{3}{2\nu}\right)^{3\nu} 2^\nu \left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{\nu} =$

$$= \underbrace{2^{3\nu+\nu}}_{>2^\nu} \underbrace{\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{2\nu}{3}}\right)^{\frac{2\nu}{3}}}_{\to e}\right)^{\frac{9}{2}} \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{2\nu}}_{\to e}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\substack{\longrightarrow e^5 \\ \text{άλγεβρα} \\ \text{ορίων}}} \underbrace{> \underbrace{2^\nu}_{\to\infty} \frac{e^5}{2} \quad \forall \nu > \nu_0 \text{ για κάποιο } \nu_0 \in \mathbb{N}}_{\implies \alpha_\nu \to \infty}$$

]