[§2.1] Η έννοια της σειράς

Ορισμός [2.1] Ονομάζουμε σειρά (πραγματικών αριθμών) την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$\sigma_\nu := \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu \quad , \quad \nu \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

μιας ακολουθίας (πραγματικών αριθμών) α_ν, $\nu \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση: α) Κάθε ακολουθία (α_ν) καθορίζει πλήρως, μέσω της (1), μια σειρά (σ_ν) και κάθε σειρά (σ_ν) καθορίζει πλήρως μια ακολουθία (α_ν), έτσι ώστε τα μερικά αθροίσματά της (α_ν) να δίνουν την (σ_ν): $\alpha_1 := \sigma_1$, $\alpha_2 := \sigma_2 - \sigma_1$, $\alpha_3 := \sigma_3 - \sigma_2$, $\dots$, $\alpha_{\nu+1} = \sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu$, $\dots$

β) Πολλές φορές συμβολίζουμε την σειρά (σ_ν) με

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu + \dots$$

[αν και είναι προκαμότερο να χρησιμοποιούμε το $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ως το όριο της ακολουθίας (σ_ν), όταν αυτό υπάρχει:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu := \lim \sigma_\nu$$

Για να διακρίνουμε την σειρά (σ_ν) από το όριό της μπορούμε να την γράφουμε και ως $\sum \alpha_\nu$ (ή $\sum_{\nu} \alpha_\nu$ ή $\sum_{\nu=1} \alpha_\nu$).]

γ) Όταν μας δίνεται μια σειρά $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k$, $\nu \in \mathbb{N}$ ονομάζουμε <u>τα α_ν όρους της σειράς</u> και <u>τα σ_ν μερικά αθροίσματα της σειράς</u>.

Παραδείγματα [2.2 – 2.5]: Μερικές επώνυμες σειρές:

α) **Η σειρά των φυσικών αριθμών:** $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu$

$$\alpha_\nu = \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} k = 1+2+3+\dots+(\nu-2)+(\nu-1)+\nu$$

$$= \nu+(\nu-1)+(\nu-2)+\dots+3+2+1$$

$$= \frac{(\nu+1)\nu}{2}$$

β) **Η αριθμητική σειρά:** $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha+(\nu-1)\omega)$

$$\alpha_\nu = \alpha+(\nu-1)\omega,\ \nu\in\mathbb{N} \Rightarrow \sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} (\alpha+(k-1)\omega) =$$

$$= \alpha+(\alpha+\omega)+(\alpha+2\omega)+\dots+\alpha+(\nu-1)\omega = \nu\alpha+\frac{\nu(\nu-1)}{2}\omega$$

$$= \nu\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2}\omega\right)$$

γ) <u>Η γεωμετρική σειρά</u> : $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha \omega^{\nu-1}$

$$\alpha_\nu = \alpha\omega^{\nu-1},\ \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha\omega^{k-1}$$

$$= \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{\nu-1} = \alpha\left(1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{\nu-1}\right)$$

$$= \alpha \frac{1-\omega^\nu}{1-\omega} \quad \boxed{\text{γιά } \omega \neq 1}$$

(βλ. Σημ. 4.1/5)

δ) <u>Η αρμονική σειρά</u> : $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu},\ \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\nu}$$

<u>Παράδειγμα</u> [2.6]: $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+2)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \dots + \frac{1}{\nu(\nu+2)} + \dots$

ο γενικός όρος της σειράς είναι $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu(\nu+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\nu+2}\right)$

και άρα το ν-οστό μερικό της άθροισμα

$$\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{\nu+2} \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2}\right)$$

$$\left[\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \dots + \cancel{\frac{1}{\nu}} \\ & \quad - \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \dots - \cancel{\frac{1}{\nu}} - \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2} \\ = \; & 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2} \end{aligned}\right]$$

[§2.2] Σύγκλιση σειρών

Ορισμός [2.7] Η σειρά (σ_ν) με $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k$

[ή $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ή $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu + \dots$ ή $\sum \alpha_\nu$]

α) συγκλίνει $:\Longleftrightarrow \exists\, \ell \in \mathbb{R} : \sigma_\nu \to \ell$

(και γράφουμε: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty$ και, ειδικότερα, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \ell = \lim \sigma_\nu$)

β) απειρίζεται θετικά (αρνητικά) [ή τείνει στο ∞ $(-\infty)$ (ή συγκλίνει κατ' εκδοχή)] $:\Longleftrightarrow \sigma_\nu \to \infty$ $(-\infty)$

(και γράφουμε: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty$ $(-\infty)$)

γ) αποκλίνει [ή κυμαίνεται] $:\Longleftrightarrow$ ούτε συγκλίνει ούτε απειρίζεται (θετικά ή αρνητικά)

Παραδείγματα [§2.2, Εφ. 1-3]:

α) Η αριθμητική σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha+(\nu-1)\omega)$, $\alpha,\omega\in\mathbb{R}$,

έχει τα μερικά αθροίσματα $\sigma_\nu=\nu\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2}\omega\right)=\omega\nu^2\left(\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{2\alpha-\omega}{2\omega\nu}}_{\to 0}\right)$ $\boxed{\omega\neq 0}$

και άρα

$\underline{\omega=0}$: $\sigma_\nu\begin{cases}\to\infty & \text{για } \alpha>0\\ =0\ \forall\nu\in\mathbb{N} & \text{για } \alpha=0\\ \to-\infty & \text{για } \alpha<0\end{cases}$

$\underline{\omega\neq 0}$: $\sigma_\nu\to\begin{cases}\infty & \text{για } \omega>0\\ -\infty & \text{για } \omega<0\end{cases}$ [Θ. [1.73] αφού $\frac{\sigma_\nu}{\nu^2}\to\frac{\omega}{2}$ και $\nu^2\to\infty$]

β) Η γεωμετρική σειρά $\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha\omega^{\nu-1}}$, $\alpha,\omega\in\mathbb{R}$

Αφού $\sigma_\nu = \begin{cases} \alpha \dfrac{1-w^\nu}{1-w} & \text{για } w \neq 1 \\ \nu\alpha & \text{για } w = 1 \end{cases}$ (βλ. προηγ. Παρ. [2.4])

και γνωρίζοντας ότι $w^\nu \to 0$ για $|w| < 1$ (Παρ. [1.52])

$w^\nu \to \infty$ για $w > 1$

Έχουμε $\sigma_\nu = 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$ για $\alpha = 0$, $w \in \mathbb{R}$

$\sigma_\nu \to \dfrac{\alpha}{1-w}$ για $|w| < 1$

$\sigma_\nu \to \begin{cases} \infty & \text{για } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{για } \alpha < 0 \end{cases}$ και $w \geq 1$

Για $w = -1$ έχουμε $\sigma_\nu = \alpha \dfrac{1-(-1)^\nu}{1-(-1)} = \alpha \dfrac{1+(-1)^{\nu+1}}{2}$

και άρα, για $\alpha \neq 0$ έχουμε $\sigma_{2\nu-1} = 0$ και $\sigma_{2\nu} = \alpha \neq 0$

Συνεπώς (Θ. [1.43]) η σ_ν δεν συγκλίνει, αλλά καθώς είναι φραγμένη ούτε απειρίζεται (ούτε θετικά ούτε αρνητικά)

Για $w < -1$ έχουμε $w = -|w|$ με $|w| > 1$ και άρα

$$\sigma_\nu = \alpha \frac{1 + (-1)^{\nu+1} |w|^\nu}{1+|w|}$$

$$\Rightarrow \sigma_{2\nu} = \alpha \frac{1 - |w|^{2\nu}}{1+|w|} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{για } \alpha < 0 \\ -\infty & \text{για } \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{2\nu-1} = \alpha \frac{1 + |w|^{2\nu-1}}{1+|w|} \longrightarrow \begin{cases} \infty & \text{για } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{για } \alpha < 0 \end{cases}$$

και άρα η σ_ν ως μη φραγμένη δεν συγκλίνει, αλλά ούτε απειρίζεται αφού $\sigma_\nu \to \underset{(-\infty)}{\infty} \Rightarrow \sigma_{k_\nu} \to \underset{(-\infty)}{\infty}$ για κάθε υπακολουθία $(\sigma_{k_\nu}) \subset (\sigma_\nu)$. (Αποδ. όπως για το Θ. [1.43])

Συνοψίζοντας έχουμε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha w^{\nu-1} = \begin{cases} 0 & \text{για } \alpha = 0 \\ \dfrac{\alpha}{1-w} & \text{για } |w|<1 \\ \infty & \text{για } w \geq 1,\ \alpha > 0 \\ -\infty & \text{για } w \geq 1,\ \alpha < 0 \\ \text{αποκλίνει} & \text{για } w \leq -1,\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

γ) Η <u>αρμονική σειρά</u> $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ απειρίζεται θετικά

(και γράφουμε: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \infty$)

<u>Απόδειξη</u>: (i) Η $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k}$ είναι γνησίως αύξουσα, αφού

$\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu = \frac{1}{\nu+1} > 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$. (ii) Η (σ_ν) δεν συγκλίνει

σύμφωνα με το κριτήριο σύγκλισης του Cauchy (Θ. [1.79]),

αφού $|\sigma_{2\nu} - \sigma_\nu| = \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \dots + \frac{1}{\nu+\nu} > \nu \cdot \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ (όλα τα $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$) $\forall\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, \nu > \nu_0$ (όλα τα $\nu > \nu_0$) $\exists\, k \in \mathbb{N}$ (όλα τα $k = \nu$) $: |\sigma_{\nu+k} - \sigma_\nu| > \varepsilon$,

δηλ. <u>δεν</u> ισχύει: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu > \nu_0\ \forall\, k \in \mathbb{N} : |\sigma_{\nu+k} - \sigma_\nu| < \varepsilon$,

συνεπώς η (σ_ν) <u>δεν</u> είναι ακολουθία Cauchy,

και άρα δεν συγκλίνει.

Από τις (i) και (ii) προκύπτει ότι η (σ_ν) δεν είναι άνω φραγμένη, δηλ. $\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \sigma_{\nu_0} > M$,

$\underset{(\sigma_\nu)\ \text{αύξουσα}}{\Longrightarrow} \forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu \geq \nu_0 : \sigma_\nu > M \iff \sigma_\nu \to \infty.$

$\square$

[§ 2.3] Βασικές ιδιότητες σειρών

4.2/12

Θεώρημα [2.11]

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k\right)$ φραγμένη

β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \alpha_\nu \to 0$

Απόδειξη: α) $\Rightarrow$: $\sigma_\nu \to \ell \in \mathbb{R} \underset{\text{Θ.[1.37]}}{\Longrightarrow} (\sigma_\nu)$ φραγμένη.

$\not\Leftarrow$: $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^k$

$\Rightarrow \sigma_{2\nu} = 0$, $\sigma_{2\nu-1} = -1 \underset{\text{Θ.[1.43]}}{\Longrightarrow} (\sigma_\nu)$ δεν συγκλίνει.

β) $\Rightarrow$: $\sigma_\nu \to \ell \underset{\text{Θ.[1.43]}}{\Longrightarrow} \sigma_{\nu+1} \to \ell \underset{\text{άλγεβρα ορίων}}{\Longrightarrow} \alpha_{\nu+1} = \sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu \to 0$

$\underset{\text{πόρισμα Θ.[1.43]}}{\Longrightarrow} \alpha_\nu \to 0$ $\quad \not\Leftarrow$: $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0$ αλλά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \infty$. $\square$

Παρατήρηση [2.12]: Από το β) έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\alpha_\nu \not\to 0 \implies \sum \alpha_\nu \text{ δεν συγκλίνει}}$$

Θεώρημα [2.13]

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \ell \in \mathbb{R},\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = m \in \mathbb{R} \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} (\xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu) = \xi\ell + \eta m, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη: $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \to \ell$, $\tau_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k \to m$

$$\implies S_n = \sum_{k=1}^{\nu} (\xi\alpha_k + \eta\beta_k) = \xi s_\nu + \eta \tau_\nu \xrightarrow[\text{Θ. [1.48] α), β)}]{} \xi\ell + \eta m$$

(άλγεβρα ορίων)

$\square$

4.2/14

Προσοχή: $\exists\, \xi, \eta \in \mathbb{R} : \sum_{\nu=1}^{\infty} (\xi \alpha_\nu + \eta \beta_\nu) < \infty \not\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu, \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < \infty$

Π.χ. $\sum_{\nu=1}^{\infty} 0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} (1-1) = 0$ αλλά $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1 = \infty \left(\Leftrightarrow \sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} 1 = \nu \to \infty \right)$

[§2.4] Κριτήρια συγκλίσεως σειρών

Θεώρημα [2.16] (Κριτήριο του Cauchy)

$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty \;:\Leftrightarrow\; \underbrace{(\sigma_\nu)}_{:= \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow (\sigma_\nu)$ ακολουθία Cauchy

Θ. [1.79]

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \left| \underbrace{\sigma_{\nu+k} - \sigma_\nu}_{= \sum_{\ell=\nu+1}^{\nu+k} \sigma_\ell} \right| < \varepsilon$

Απόδειξη: Θ. [1.79]

Θεώρημα [2.18] $\boxed{\alpha_\nu \geq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}}$. Τότε:

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ φραγμένη $\Longleftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty$

β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ μη φραγμένη $\Longleftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty$

Απόδειξη: $\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu = \alpha_\nu \geq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \text{ αύξουσα}}$

α) $\Rightarrow$: Θ. [1.59] (αύξουσες και άνω φραγμένες ακολουθίες (σ_ν) συγκλίνουν)

$\Leftarrow$: Θ. [1.37] (κάθε συγκλίνουσα ακολουθία (σ_ν) είναι φραγμένη)

β) $\Rightarrow$: $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}: \sigma_{\nu_0} = \sum_{k=1}^{\nu_0} \alpha_k > M \underset{\alpha_\nu \geq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} \sigma_\nu \geq \sigma_{\nu_0} > M \ \forall \nu \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$: Αν η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ήταν φραγμένη θα συνέκλινε σύμφωνα με το α). $\square$

4.2/16

Θεώρημα [2.21] (Κριτήριο σύγκρισης σειρών)

$$\boxed{0 \leq \alpha_\nu \leq M\beta_\nu \quad \forall \nu > \nu_0, \ M > 0}$$ Τότε:

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < \infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty$ β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = \infty$

Απόδειξη: $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k, \quad \tau_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k$.

α) $\forall \nu > \nu_0$: $\sigma_\nu = \sigma_{\nu_0} + \sum_{k=\nu_0+1}^{\nu} \alpha_k \leq \sigma_{\nu_0} + M \sum_{k=\nu_0+1}^{\nu} \beta_k = \sigma_{\nu_0} + M(\tau_\nu - \tau_{\nu_0})$

$\leq \sigma_{\nu_0} + ML, \ L \geq 0$, αφού $\tau_\nu \to \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < \infty$

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}: \sigma_\nu \leq K \ \forall \nu \in \mathbb{N} \underset{(\sigma_\nu) \text{ αύξουσα}}{\Longrightarrow} \sigma_\nu \to m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty$.

β) $\sigma_\nu \to \infty \underset{\text{Θ.[1.72]}}{\Longrightarrow} \sigma_{\nu_0} + M(\tau_\nu - \tau_{\nu_0}) \to \infty \Leftrightarrow \tau_\nu \to \infty$. $\square$

Θεώρημα [2.24] (Οριακό κριτήριο σύγκρισης σειρών)

$$\boxed{\alpha_\nu, \beta_\nu > 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \longrightarrow \ell \in [0,\infty]}$$

$\boxed{\ell \in (0,\infty)}$

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty \iff \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < \infty$

β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty \iff \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = \infty$

$\boxed{\ell = 0}$

γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < \infty \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty$

δ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = \infty$

$\boxed{\ell = \infty}$

ε) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < \infty$

στ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = \infty \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty$

Απόδειξη:

$\boxed{\ell \in (0,\infty)}$: $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \to \ell \in (0,\infty) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0\ \left|\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} - \ell\right| < \varepsilon$

$\underset{\varepsilon := \frac{\ell}{2}}{\Longrightarrow}\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \left|\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} - \ell\right| < \frac{\ell}{2} \iff -\frac{\ell}{2} < \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} - \ell < \frac{\ell}{2}$

$\iff \frac{\ell}{2} < \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} < \frac{3\ell}{2}$

$\Longrightarrow\ \forall \nu > \nu_0 : \quad 0 < \frac{\ell}{2}\beta_\nu < \alpha_\nu < \frac{3\ell}{2}\beta_\nu \quad \underset{\text{Θ. [2.21]}}{\Longrightarrow}\ \alpha), \beta)$.

$\boxed{\ell = 0}$: $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \to 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0\ \left|\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right| < \varepsilon \underset{\alpha_\nu, \beta_\nu > 0}{\iff} 0 < \alpha_\nu < \varepsilon \beta_\nu$

$\underset{\text{Θ. [2.21]}}{\Longrightarrow}\ \gamma), \delta)$

$\boxed{\ell = \infty}$: $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \to \infty \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} > \frac{1}{\varepsilon} \underset{\alpha_\nu, \beta_\nu > 0}{\iff} \beta_\nu < \varepsilon \alpha_\nu$

$\underset{\text{Θ. [2.21]}}{\Longrightarrow}\ \varepsilon), \sigma)$.

$\square$

Παραδείγματα:

1) $\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \geq \frac{1}{\nu} \iff \nu \geq \sqrt{\nu} \iff \nu^2 \geq \nu \iff \nu \geq 1 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

και άρα $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \infty \underset{[2.21]}{\Longrightarrow} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} = \infty$

2) $\alpha_\nu = \frac{\nu}{(\nu+1)2^\nu} < \frac{\nu+1}{(\nu+1)2^\nu} = \frac{1}{2^\nu} = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu, \quad \alpha_\nu > 0$

και άρα, αφού

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 < \infty$$

$$\underset{[2.21]}{\Longrightarrow} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{(\nu+1)2^\nu} < \infty.$$

4.2.20

3) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+2)} \Rightarrow \sigma_\nu = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{\nu+1}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{\nu+2}}_{\to 0}\right) \longrightarrow \frac{3}{4}$$

(βλ. Παραδ. [2.6]) $$\Longrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+2)} = \frac{3}{4}.$$

4) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{\nu-1} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\,\frac{3}{3-2} = 2$$