[§2.4] Κριτήρια σύγκλισης σειρών (συνέχεια)

Θεώρημα [2.26]: Η αρμονική σειρά ρ-τάξης

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} = \begin{cases} \infty & \text{για } \rho \leq 1 \\ \text{συγκλίνει} & \text{για } \rho > 1 \end{cases}}$$

[Παρατήρηση: Η συνάρτηση $\zeta(\rho) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$, $\rho > 1$, λέγεται ζ-συνάρτηση του Riemann.]

Απόδειξη:

$\boxed{\rho \leq 1} \Rightarrow \nu^\rho \leq \nu \iff \left.\begin{array}{l} \frac{1}{\nu} \leq \frac{1}{\nu^\rho} \\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} = \infty$

κριτήριο σύγκρισης σειρών (Θ.[2.21] β))

$\boxed{\rho > 1}$ βλ. [Nτ. Θ. 2.26] (Σημ. 4A/4)) ή Παραδ. [2.44] πιο κάτω

Παραδείγματα: $\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} = \infty, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \infty, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} < \infty}$

<u>Παρατήρηση</u> [2.25]: Συχνά χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκρισης Θ. [2.24], $\ell \in (0,\infty)$, συγκρίνοντας την ακολουθία (α_ν) μιας σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ με την αρμονική σειρά ρ-τάξης $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$, όπου το ρ ισούται με την μεγαλύτερη δύναμη του ν στο α_ν.

<u>Παράδειγμα</u>:

$$\left.\sum_{\nu=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(2\nu+1)\left(\sqrt[3]{\nu^3+1}\right)}{5\nu^6+1}}_{=\alpha_\nu}\right\} \Rightarrow \beta_\nu = \frac{\nu^2}{\nu^6} = \frac{1}{\nu^4}$$

Έτσι ώστε

$$\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{(2\nu+1)\left(\sqrt[3]{\nu^3+1}\right)}{5\nu^2+\frac{1}{\nu^4}} = \frac{\left(2+\frac{1}{\nu}\right)\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{\nu^3}}\right)}{5+\frac{1}{\nu^6}} \to \frac{2}{5}$$

και

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^4} \underset{[2.26]}{<} \infty \underset{[2.24]}{\Longleftrightarrow} \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty$$

Θεώρημα (Πορ. του Θ. [2.29]) (Κριτήριο πηλίκων του d' Alembert)

$a_\nu > 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$, $\quad \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \longrightarrow k \geq 0$

α) $k \in [0,1) \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < \infty$

β) $k > 1 \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = \infty$

γ) $k = 1 \implies$ ή $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < \infty$ ή $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = \infty$

Απόδειξη :

α) $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \longrightarrow k \in [0,1) \implies$ Για $\varepsilon := \frac{1-k}{2} > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \geq \nu_0$:

$$\left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} - k \right| \leq \frac{1-k}{2} \iff -\frac{1-k}{2} \leq \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} - k \leq \frac{1-k}{2}$$

$$\iff k - \frac{1-k}{2} \leq \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \leq k + \frac{1-k}{2} = \frac{1+k}{2} =: q < 1 ,$$

συνεπώς $\exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \geq \nu_0$: $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \leq q$

$$\Rightarrow \quad \forall\, \nu \geq \nu_0 : \quad \alpha_\nu = \underbrace{\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}}}_{\leq q} \underbrace{\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-2}}}_{\leq q} \cdots \underbrace{\frac{\alpha_{\nu_0+1}}{\alpha_{\nu_0}}}_{\leq q} \alpha_{\nu_0} \leq q^{\nu-\nu_0} \alpha_{\nu_0}$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, \nu > \nu_0 : \quad \sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\nu_0} \alpha_k + \sum_{k=\nu_0+1}^{\nu} \alpha_k \leq \sigma_{\nu_0} + \alpha_{\nu_0} \sum_{k=\nu_0+1}^{\nu} q^{\nu-\nu_0} =$$

$$= \sigma_{\nu_0} + \alpha_{\nu_0} \sum_{k=1}^{\nu-\nu_0} q^k = \sigma_{\nu_0} + \alpha_{\nu_0} q \sum_{k=1}^{\nu-\nu_0} q^{k-1} < \sigma_{\nu_0} + \alpha_{\nu_0} q \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} < \infty, \text{ αφού } q \in (0,1)$$

$\Rightarrow (\sigma_\nu)$ φραγμένη $\underset{(\sigma_\nu) \text{ αύξ.}}{\Longrightarrow}$ (σ_ν) συγκλίνει.

β) $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \to k > 1 \Rightarrow$ Για $\varepsilon := k-1 > 0$ $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}$ $\forall \nu \geq \nu_0$:

$$\left| \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} - k \right| < k-1 \Leftrightarrow -k+1 < \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} - k < k-1 \Rightarrow 1 < \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$$

και συνεπώς $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}$ $\forall \nu \geq \nu_0$: $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu \geq \alpha_{\nu_0}$

$$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} : \alpha_\nu \geq m := \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu_0-1}, \alpha_{\nu_0}\} > 0$$

$\Rightarrow$ Για $\varepsilon := m > 0$ $\nexists$ $\nu_1 \in \mathbb{N}$ $\forall \nu \geq \nu_1$: $\alpha_\nu = |\alpha_\nu| < \varepsilon$,

δηλ. $\alpha_\nu \not\to 0 \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ δεν συγκλίνει

$\underset{\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu \text{ αύξ.}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ μη φραγμένη $\underset{\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu \text{ αύξ.}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty$

γ) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} > 0 \Rightarrow \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\nu}{\nu+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{\nu}} \to 1$ αλλά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \infty$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu(\nu+1)} > 0 \Rightarrow \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\nu(\nu+1)}{(\nu+1)(\nu+2)} = \frac{\nu}{\nu+2} = \frac{1}{1+\frac{2}{\nu}} \to 1$$

και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \overset{2}{<} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \underset{[2.26]}{\overset{1}{<}} \infty$. $\square$

[Οι τελευταίες δύο ανισότητες εμπεριέχουν τα εξής:

1 Η σειρά συγκλίνει ή, ισοδύναμα, το όριό της είναι $\in \mathbb{R}$, δηλ. $<\infty$, αφού $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. [Το ότι δεν είναι $-\infty$ εξυπακούεται αφού η σειρά είναι αύξουσα. Γι' αυτό συνήθως συμβολίζουμε την σύγκλιση σειράς με "$<\infty$" μόνο όταν $\alpha_\nu \geq 0$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$.]

15.1.16

(2) Η πρώτη σειρά έχει μερικά αθροίσματα μικρότερα απ' αυτά της δεύτερης. Αφού η δεύτερη συγκλίνει και είναι αύξουσα (δηλ. έχει μη αρνητικούς όρους), τότε η πρώτη είναι άνω φραγμένη (από το όριο της δεύτερης) και αφού είναι αύξουσα συγκλίνει και το όριό της είναι μικρότερο ή ίσο από αυτό της δεύτερης.(*)

(*) Γενικά ισχύει: $\alpha_\nu \leq \beta_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$, $\alpha_\nu \to \alpha$, $\beta_\nu \to \beta \Rightarrow \alpha \leq \beta$:

Με $\gamma_\nu := \beta_\nu - \alpha_\nu$ αποδεικνύουμε: $\gamma_\nu \geq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$, $\gamma_\nu \to \gamma \Rightarrow \gamma \geq 0$:

[Αν $\gamma < 0$, τότε για $\varepsilon := -\gamma > 0$ $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}$ $\forall \nu > \nu_0$: $\gamma_\nu - \gamma < -\gamma$, δηλ. $\gamma_\nu < 0$ ↯.]

<u>Θεώρημα</u> (Πορ. του Θ. [2.34]) (<u>Κριτήριο ν-οστής ρίζας του Cauchy</u>)

$$\alpha_\nu \geq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \to k \geq 0$$

α) $k \in [0,1) \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty$

β) $k > 1 \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty$

γ) $k = 1 \Rightarrow$ ή $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty$ ή $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty$

Απόδειξη:

α) $\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \to k \in [0,1) \Rightarrow$ Για $\varepsilon := \frac{1-k}{2} > 0 \ \exists \ \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \geq \nu_0$:
$\left|\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} - k\right| \leq \frac{1-k}{2} \Leftrightarrow -\frac{1-k}{2} + k \leq \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \leq k + \frac{1-k}{2} = \frac{1+k}{2} =: q < 1$
$\Rightarrow \exists \ \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \ \nu \geq \nu_0: \ \alpha_\nu \leq q^\nu = q^{\nu-\nu_0} q^{\nu_0}$ και συνεχίζουμε όπως στο κριτήριο πηλίκων του d'Alembert (με q^{ν_0} αντί για α_{ν_0}).

β) $\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \to k > 1 \Rightarrow$ Για $\varepsilon := k-1 > 0 \ \exists \ \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \geq \nu_0$:
$\left|\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} - k\right| \leq k-1 \Leftrightarrow -k+1 \leq \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} - k \leq k-1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt[\nu]{\alpha_\nu}$,
συνεπώς $\exists \ \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \ \nu \geq \nu_0: \ \alpha_\nu \geq 1$ και συνεχίζουμε όπως στο κριτήριο πηλίκων του d'Alembert (με 1 αντί για α_{ν_0}).

γ) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} > 0 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu}} \to 1$ αλλά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \infty$. Από την άλλη,
$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu(\nu+1)} > 0 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu}\sqrt[\nu]{\nu+1}} \to 1$ (αφού $\underbrace{\sqrt[\nu]{\nu}}_{\to 1} < \sqrt[\nu]{\nu+1} \leq \sqrt[\nu]{2\nu} = \underbrace{\sqrt[\nu]{2}}_{\to 1}\underbrace{\sqrt[\nu]{\nu}}_{\to 1}$)
και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} < \infty$. $\square$