[§ 2.4] Κριτήρια σύγκλισης σειρών (2η συνέχεια)

Απλά παραδείγματα εφαρμογής των κριτηρίων πηλίκου και ν-οστής ρίζας:

([2.32], [2.33], [2.37], [2.38]):

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^\nu}{\nu!} < \infty$, αφού $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{2^{\nu+1}\,\nu!}{(\nu+1)!\,2^\nu} = \frac{2}{\nu+1} \to 0 < 1$

β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^\nu}{\nu!} = \infty$, αφού $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{(\nu+1)^{\nu+1}\,\nu!}{(\nu+1)!\,\nu^\nu} = \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \to e > 1$

[Ισχύει $e := \lim \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ το οποίο υπάρχει (βλ. Σημ. 4.1/17)
και αφού η $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ είναι γνησίως αύξουσα (βλ. Σημ. 4.1/17)
έχουμε $e = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu : \nu \in \mathbb{N}\right\} > \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 > 1$]

γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{3^\nu}{\nu^\nu} < \infty$, αφού $\left(\frac{3^\nu}{\nu^\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{3}{\nu} \to 0 < 1$

δ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu^2} = \infty$, αφού $\left(\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu^2}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \to e > 1$

<u>Παράδειγμα</u>: Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu!)^2}{2^{\nu^2}}$

<u>Λύση</u>: $\alpha_\nu = \frac{(\nu!)^2}{2^{\nu^2}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{((\nu+1)!)^2 \, 2^{\nu^2}}{2^{(\nu+1)^2} (\nu!)^2} = \frac{((\nu+1)\nu!)^2 \, 2^{\nu^2}}{2^{\nu^2} 2^{2\nu+1} (\nu!)^2} = \frac{(\nu+1)^2}{2^{2\nu+1}}$$

Εξετάζουμε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ με $\beta_\nu = \frac{(\nu+1)^2}{2^{2\nu+1}}$

Έχουμε $\sqrt[\nu]{\beta_\nu} = \sqrt[\nu]{\frac{(\nu+1)^2}{2^{2\nu+1}}} = \frac{\left(\sqrt[\nu]{\nu+1}\right)^2}{\sqrt[\nu]{2} \cdot 4} \longrightarrow \frac{1}{4} < 1$

$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu < \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \beta_\nu \longrightarrow 0 < 1 \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty .$$

Παρατήρηση: [2.39]

Επειδή αποδεικνύεται$^{(*)}$ ότι $\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \to \ell \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \to \ell$,
το κριτήριο ν-οστής ρίζας του Cauchy είναι πιό γενικό (και άρα πιο ισχυρό) από το κριτήριο πηλίκων του d'Alembert, υπό την έννοια ότι το δεύτερο μπορεί να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις όπου δεν μπορεί να εφαρμοστεί το πρώτο.
Έτσι, επειδή από την άλλη είναι πιο εύκολο να υπολογιστεί το $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ από το $\lim \sqrt[\nu]{a_\nu}$, προσπαθούμε πρώτα να εφαρμόσουμε το κριτήριο πηλίκων και, αν δεν μπορούμε, μετά το κριτήριο της ν-οστής ρίζας (εκτός εάν $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 1$).

((*) βλ. Πρόταση 5 στο Παράρτημα πιο κάτω)

Όπως είδαμε, στα κριτήρια πηλίκων και ν-οστής ρίζας (στην μορφή που τα παρουσιάσαμε εδώ) απαιτείται η ύπαρξη των ορίων $\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ και $\lim \sqrt[\nu]{\alpha_\nu}$, αντίστοιχα. Αυτό δεν είναι απαραίτητο. Υπάρχουν γενικεύσεις, τις οποίες εδώ απλώς παραθέτουμε (και για λόγους πληρότητας αποδεικνύουμε στο Παράρτημα), οι οποίες για μη συγκλίνουσες ακολουθίες $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$, $\sqrt[\nu]{\alpha_\nu}$ απαιτούν γνώση των κατώτερων και ανώτερων δυνατών ορίων των συγκλινουσών υπακολουθιών τους. Για εφαρμογές των γενικεύσεων αυτών, βλ. Σημ. 5Α/$\boxed{4}$-$\boxed{6}$, 6Α/$\boxed{E4/1}$. Πιο συγκεκριμένα:

<u>Ορισμός</u> [1.82] Για μια φραγμένη ακολουθία (α_ν) ονομάζουμε <u>κατώτερο</u> (αντίστοιχα <u>ανώτερο</u>) <u>όριο της ακολουθίας</u> το ελάχιστο (αντίστοιχα μέγιστο) σημείο συσσώρευσής της, το οποίο συμβολίζουμε με $\liminf \alpha_\nu$ (αντίστοιχα $\limsup \alpha_\nu$).

[(α_ν) μη κάτω φραγμένη: $\liminf \alpha_\nu := -\infty$, (α_ν) μη άνω φραγμένη: $\limsup \alpha_\nu := \infty$]

Για την ύπαρξη του ελάχιστου και μέγιστου σημείου συσσώρευσης, βλ. Παράρτημα

Ισχύει (βλ. Παράρτημα, Πρότ. 3): $\boxed{\liminf \alpha_\nu = \limsup \alpha_\nu = \ell \iff \lim \alpha_\nu = \ell}$

Θεώρημα [2.31] (Γενική μορφή κριτηρίου πηλίκων του d'Alembert)

$\alpha_\nu > 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$, $\quad \alpha := \limsup \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$, $\quad \beta := \liminf \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$

α) $\alpha < 1 \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty$

β) $\beta > 1 \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty$

γ) $\beta \leq 1 \leq \alpha \implies$ ή $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty$ ή $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty$

Θεώρημα [2.36] (Γενική μορφή κριτηρίου ν-οστής ρίζας του Cauchy)

$\alpha_\nu \geq 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$, $\quad k := \limsup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu}$

α) $k < 1 \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty$

β) $k > 1 \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty$

γ) $k = 1 \implies$ ή $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty$ ή $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty$.

[§2.5] Σειρές με φθίνοντες θετικούς όρους

Θεώρημα [2.42] (Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy)

$\alpha_\nu \geq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$, $\alpha_{\nu+1} \leq \alpha_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty \iff \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu-1} \alpha_{2^{\nu-1}} < \infty$$

Παρατήρηση: Από την πιο πάνω ισοδυναμία έχουμε ισοδύναμα και

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty \underset{\Sigma \alpha_\nu \text{ αυξ.}}{\iff} \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \not< \infty \iff \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu-1} \alpha_{2^{\nu-1}} \not< \infty \underset{\Sigma 2^{\nu-1}\alpha_{2^{\nu-1}} \text{ αυξ.}}{\iff} \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu-1} \alpha_{2^{\nu-1}} = \infty$$

Απόδειξη: $\sigma_\nu := \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k$, $\tau_\mu := \sum_{k=1}^{\mu} 2^{k-1} \alpha_{2^{k-1}}$, $\nu, \mu \in \mathbb{N}$

$\nu \leq 2^{\mu-1} \Rightarrow$

$$\sigma_\nu \leq \alpha_1 + (\alpha_2+\alpha_3) + (\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7) + \dots + (\alpha_{2^{\mu-1}} + \dots + \alpha_{2^\mu - 1})$$

$$\leq \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_4 + \dots + 2^{\mu-1}\alpha_{2^{\mu-1}} = \tau_\mu$$

'Έστω, αν $\tau_\mu \to m \in \mathbb{R} \underset{(\tau_\mu)\ \text{αύξ.}}{\Rightarrow} m = \sup\{\tau_\mu : \mu \in \mathbb{N}\} \geq \sigma_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

$\underset{(\sigma_\nu)\ \text{αύξ.}}{\Longrightarrow} \exists\, \ell \in \mathbb{R} : \sigma_\nu \to \ell$. Δηλ.: $\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu-1}\alpha_{2^{\nu-1}} < \infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty$

$\nu \underset{(=)}{>} 2^{\mu-1} \Rightarrow$

$$\sigma_\nu \geq (\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3+\alpha_4) + (\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8) + \dots + (\alpha_{2^{\mu-2}+1} + \dots + \alpha_{2^{\mu-1}})$$

$$\geq \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 + 4\alpha_8 + \dots + 2^{\mu-2}\alpha_{2^{\mu-1}}$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_4 + 8\alpha_8 + \dots + 2^{\mu-1}\alpha_{2^{\mu-1}}) = \frac{1}{2}\tau_\mu$$

'Έστω, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu < \infty \underset{\Sigma\alpha_\nu\ \text{αύξ.}}{\Longrightarrow} \tau_\mu \leq 2\sup\{\sigma_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\ \forall \mu \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu-1}\alpha_{2^{\nu-1}} < \infty.$

$\square$

Παράδειγμα [2.44] $\quad a_\nu = \dfrac{1}{\nu^\rho}$, $\rho > 0$

$a_\nu > 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$, $a_{\nu+1} < a_\nu \iff \dfrac{1}{(\nu+1)^\rho} < \dfrac{1}{\nu^\rho} \iff \nu^\rho < (\nu+1)^\rho \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

για $\rho > 0$ [Η $f(x) = x^\alpha$ είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq 0$, $\alpha > 0$]

Σύμφωνα με το κριτήριο συμπύκνωσης η σύγκλιση ή μη της (αρμονικής σειράς ρ-τάξης) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu^\rho}$ είναι ισοδύναμη με την σύγκλιση ή μη της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu-1} \dfrac{1}{(2^{\nu-1})^\rho} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2^{\nu-1})^{\rho-1}} =$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{\rho-1})^{\nu-1}} \begin{cases} < \infty & \text{για } \dfrac{1}{2^{\rho-1}} < 1 \iff 1 < 2^{\rho-1} \iff \rho - 1 > 0 \\ = \infty & \text{για } \dfrac{1}{2^{\rho-1}} \geq 1 \iff 1 \geq 2^{\rho-1} \iff \rho - 1 \leq 0 \end{cases}$$

(ως γεωμετρική σειρά).

Συνεπώς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu^\rho} \begin{cases} < \infty & \text{για } \rho > 1 \\ = \infty & \text{για } \rho \in (0,1] \end{cases}$ (και προφανώς και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{\nu^\rho} = \infty$ για $\rho \leq 0$, αφού $\dfrac{1}{\nu^\rho} \geq 1 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$).

Αυτό αποδεικνύει το Θ.[2.26].

Άσκηση [2.19 α)]: Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση την σειρά
$$\sum_{\nu=2}^{\infty} e^{-(\log \nu)^2}$$

Λύση: $0 \leq \log \nu \uparrow$ (:⟺ αύξ.) $\Rightarrow (\log\nu)^2 \uparrow \Rightarrow -(\log\nu)^2 \downarrow$ (:⟺ φθ.) $\Rightarrow e^{-(\log\nu)^2} \downarrow$

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} e^{-(\log\nu)^2} < \infty \iff \sum_{\nu=2}^{\infty} 2^{\nu-1} e^{-(\log(2^{\nu-1}))^2} < \infty$$

$$\iff \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu} e^{-(\underbrace{\log(2^{\nu})}_{=\nu\log 2})^2} < \infty \iff \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{\nu}}{e^{\nu^2(\log 2)^2}} < \infty$$

Αλλά (με $c := (\log 2)^2$) $\dfrac{2^{\nu+1}}{e^{(\nu+1)^2 c}} \dfrac{e^{\nu^2 c}}{2^{\nu}} = \dfrac{2}{e^{(2\nu+1)c}} = \dfrac{2}{e^{c}(e^{2c})^{\nu}} \to 0$
(αφού $2c > 0 \Rightarrow e^{2c} > 1$)

και άρα από το κριτήριο πηλίκων του d'Alembert $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{\nu}}{e^{\nu^2(\log 2)^2}} < \infty$

και άρα $\displaystyle\sum_{\nu=2}^{\infty} e^{-(\log\nu)^2} < \infty$.

[Τα ίδια ισχύουν για κάθε σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} e^{-(\log\nu)^2}$ με $\nu_0 \in \mathbb{N}$.]

[§2.6] Εναλλασσόμενες σειρές

Ορισμός [2.48]: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εναλλασσόμενη $\iff$ $\alpha_\nu \alpha_{\nu+1} < 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

π.χ. $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{1}{\nu}$ (με πρώτο όρο θετικό)

$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{1}{\nu}$ (με πρώτο όρο αρνητικό)

Θεώρημα [2.49] (Κριτήριο του Leibniz)

$\alpha_\nu > 0$, $\alpha_{\nu+1} \leq \alpha_\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$, $\alpha_\nu \to 0 \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \alpha_\nu$ συγκλίνει

Απόδειξη: $\sigma_\nu := \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^{k+1} \alpha_k$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{2(\nu+1)} - \sigma_{2\nu} = \sum_{k=1}^{2(\nu+1)} (-1)^{k+1} \alpha_k - \sum_{k=1}^{2\nu} (-1)^{k+1} \alpha_k = \sum_{k=2\nu+1}^{2(\nu+1)} (-1)^{k+1} \alpha_k$$

$$= \alpha_{2\nu+1} - \alpha_{2\nu+2} \geq 0$$

$\Rightarrow$ $(\sigma_{2\nu})$ αύξουσα

5.2/11

επίσης

$$\sigma_{2\nu} = \sum_{k=1}^{2\nu} (-1)^{k+1} \alpha_k = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 - + \dots - \alpha_{2\nu-2} + \alpha_{2\nu-1} - \alpha_{2\nu}$$

$$= \alpha_1 - \underbrace{(\alpha_2 - \alpha_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(\alpha_4 - \alpha_5)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(\alpha_{2\nu-2} - \alpha_{2\nu-1})}_{\geq 0} - \underbrace{\alpha_{2\nu}}_{> 0} \leq \alpha_1$$

$\Rightarrow (\sigma_{2\nu})$ άνω φραγμένη $\xRightarrow[(\sigma_{2\nu})\text{ αυξ.}]{}$ $(\sigma_{2\nu})$ συγκλίνουσα, $\sigma_{2\nu} \to \ell \in \mathbb{R}$

Από την άλλη:

$$\sigma_{2(\nu+1)-1} - \sigma_{2\nu-1} = \sigma_{2\nu+1} - \sigma_{2\nu-1} = (-1)^{2\nu+1} \alpha_{2\nu} + (-1)^{2\nu+2} \alpha_{2\nu+1}$$

$= \alpha_{2\nu+1} - \alpha_{2\nu} \leq 0 \Rightarrow (\sigma_{2\nu-1})$ φθίνουσα

και $\sigma_{2\nu-1} = \underbrace{(\alpha_1 - \alpha_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(\alpha_3 - \alpha_4)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(\alpha_{2\nu-3} - \alpha_{2\nu-2})}_{\geq 0} + \alpha_{2\nu-1} \geq 0$

$\Rightarrow (\sigma_{2\nu-1})$ κάτω φραγμένη $\xRightarrow[(\sigma_{2\nu-1})\text{ φθ.}]{}$ $(\sigma_{2\nu-1})$ συγκλίνουσα, $\sigma_{2\nu-1} \to m \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \sigma_{2\nu} - \sigma_{2\nu-1} = \alpha_{2\nu} \to \ell - m = 0 \Rightarrow \sigma_\nu \to \ell = m.$ $\square$

<u>Παρατηρήσεις</u> ([Σημ. σ. 132/133], [Παρατ. 2.50], [Παραδ. 2.51]):

α) $\sigma_{2\nu}$ αυξάνει και $\sigma_{2\nu} \to \ell \Rightarrow \sigma_{2\nu} \leq \ell \;\; \forall \nu \in \mathbb{N}$ (1)

$\sigma_{2\nu-1}$ φθίνει και $\sigma_{2\nu-1} \to \ell \Rightarrow \sigma_{2\nu-1} \geq \ell \;\; \forall \nu \in \mathbb{N}$ (2)

$\Rightarrow$ Τα διαστήματα $\Delta_\nu := [\sigma_{2\nu}, \sigma_{2\nu-1}]$ αποτελούν έναν εγκιβωτισμό κλειστών διαστημάτων του Cantor

β) $0 \underset{(2)}{\leq} \sigma_{2\nu-1} - \ell \underset{(1)}{\leq} \sigma_{2\nu-1} - \sigma_{2\nu} = -(\sigma_{2\nu} - \sigma_{2\nu-1}) = \alpha_{2\nu} \iff |\sigma_{2\nu-1} - \ell| \leq \alpha_{2\nu}$ (3)

$0 \underset{(1)}{\leq} \ell - \sigma_{2\nu} \underset{(2)}{\leq} \sigma_{2\nu+1} - \sigma_{2\nu} = \alpha_{2\nu+1} \iff |\sigma_{2\nu} - \ell| \leq \alpha_{2\nu+1}$ (4)

(3), (4) $\iff |\sigma_\nu - \ell| \leq \alpha_{\nu+1} \;\; \forall \nu \in \mathbb{N} \iff \left| \sum_{k=\nu+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \alpha_k \right| \leq \alpha_{\nu+1} \;\; \forall \nu \in \mathbb{N}$

γ) $\sigma_{2\nu} = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \dots + \alpha_{2\nu-1} - \alpha_{2\nu} = \sum_{k=1}^{\nu} (\alpha_{2k-1} - \alpha_{2k}) \to \ell$

$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} (\underbrace{\alpha_{2\nu-1} - \alpha_{2\nu}}_{\geq 0}) = \ell = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \alpha_\nu$

5.2/13

δ) Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu}$ συγκλίνει με $\left|\sum_{k=\nu+1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right| \underset{\beta)}{<} \frac{1}{\nu+1}$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$

και $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu} \underset{\gamma)}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{2\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\nu(2\nu-1)}$ $(<\infty)$

ε) Πέραν των $\sigma_{2\nu} \leq \ell \leq \sigma_{2\nu-1}$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$ (α)) ισχύει και

$\sigma_{2\nu} < \sigma_{2\mu-1}$ $\forall \nu,\mu\in\mathbb{N}$:

$\nu=\mu$: $\sigma_{2\nu-1}-\sigma_{2\nu} = -(\sigma_{2\nu}-\sigma_{2\nu-1}) = -(-\alpha_{2\nu}) = \alpha_{2\nu} > 0$

$\nu<\mu$: $\sigma_{2\nu} \leq \sigma_{2\mu} < \sigma_{2\mu-1}$

$\nu>\mu$: $\sigma_{2\nu} < \sigma_{2\nu-1} \leq \sigma_{2\mu-1}$

<u>Άσκηση</u>: Να εξετάσετε (με το κριτήριο του Leibniz) αν οι παρακάτω σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$ συγκλίνουν, όταν 5.2/14

α) $\alpha_\nu=\frac{3\nu+1}{2^\nu}$, β) $\alpha_\nu=\frac{\nu^2}{3^\nu}$, γ) $\alpha_\nu=\frac{\nu+2}{2\nu+1}$, δ) $\alpha_\nu=\cos\frac{1}{\nu}$

<u>Λύση</u>: Σε όλες τις περιπτώσεις οι ακολουθίες (α_ν) έχουν θετικούς όρους (στην δ) επειδή $\cos x \geq 0$ για $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ και $0<\frac{1}{\nu}\leq 1<\frac{\pi}{2}$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$).

Οι ακολουθίες γ) και δ) δεν είναι μηδενικές, αφού γ): $\alpha_\nu=\frac{1+\frac{2}{\nu}}{2+\frac{1}{\nu}}\to\frac{1}{2}$ και δ): $\alpha_\nu=\cos\frac{1}{\nu}\to 1$ (η $\cos x$ είναι συνεχής και $\cos 0=1$, βλ. αργότερα)

Συνεπώς: $(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu \not\to 0 \iff |(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu|=\alpha_\nu\not\to 0 \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$ δεν συγκλίνει

Οι ακολουθίες α) και β) είναι μηδενικές, αφού (βλ. [Εφ. §1.6/1.] /4Α 3))

α) $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\frac{3\nu+4}{2^{\nu+1}}\frac{2^\nu}{3\nu+1}=\frac{1}{2}\frac{3\nu+4}{3\nu+1}\to\frac{1}{2}$ και β) $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\frac{(\nu+1)^2}{3^{\nu+1}}\frac{3^\nu}{\nu^2}=\frac{1}{3}\frac{(\nu+1)^2}{\nu^2}\to\frac{1}{3}$

Επίσης, αφού α): $3\nu+4 < 2(3\nu+1) \iff 2 < 3\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ 5.2/15

και β): $(\nu+1)^2 < 3\nu^2 \iff 2\nu+1 < 2\nu^2 \Leftarrow 3\nu < 2\nu^2 \iff 3 < 2\nu$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$, έχουμε α): $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < 1 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ και β): $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < 1 \ \forall \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 2$ και άρα οι ακολουθίες είναι φθίνουσες (στο β) $\forall \nu \geq 2$ χβτγ, αφού μπορούμε να θεωρήσουμε την σειρά $\sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\alpha_\nu - \alpha_1$).

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο του Leibniz οι α) και β) συγκλίνουν (και οι γ) και δ) δεν συγκλίνουν, το οποίο όμως δεν προκύπτει από το κριτήριο του Leibniz, αφού αυτό μας δίνει μόνο ικανές συνθήκες για την σύγκλιση).

[<u>Εργασία για το σπίτι</u>: $\alpha_\nu > 0$, $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \to \kappa \in [0,1) \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$ συγκλίνει:

$\exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 : \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq 1$, δηλ. $(\alpha_{\nu+\nu_0})\downarrow$, και $\alpha_\nu \to 0$ (Εφ. 1/§1.6, Σημ. 4Α/8)

$\Rightarrow \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} (-1)^{\nu+1}\alpha_\nu + \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$ συγκλίνει]

[§ 2.7] Απόλυτη και υπό συνθήκη σύγκλιση

5.2/16

Ορισμός [2.52]:

$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει απόλυτα $:\Longleftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu| < \infty$

$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει υπό συνθήκη $:\Longleftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει και $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu| = \infty$

Παράδειγμα [2.53]: Η $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{1}{\nu}$ συγκλίνει υπό συνθήκη

Παρατηρήσεις [2.55, 2.56]: α) $\alpha_\nu \geq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu| \Rightarrow$ οι έννοιες της σύγκλισης και της απόλυτης σύγκλισης είναι ταυτόσημες και η έννοια της υπό συνθήκη σύγκλισης δεν υπάρχει

β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει $\not\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu| < \infty$: βλ. Παρ. [2.53]

Ισχύει όμως το πολύ ισχυρό:

15.2/17

Θεώρημα [2.54]:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu| < \infty \Longrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu \text{ συγκλίνει και } \left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\right| \le \sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$$

Απόδειξη (με το κριτήριο σύγκρισης σειρών):

$$0 \le |\alpha_\nu| - \alpha_\nu \le 2|\alpha_\nu| \ \ \forall \nu\in\mathbb{N} \underset{\sum|\alpha_\nu|<\infty,\ Θ.[2.21]α)}{\Longrightarrow} \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(|\alpha_\nu|-\alpha_\nu\right) < \infty \underset{\sum|\alpha_\nu|<\infty,\ αλγ.ορ.}{\Longrightarrow} \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu \text{ συγκλίνει}$$

$$\text{και } \sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k \to \ell,\ \tau_\nu = \sum_{k=1}^{\nu}|\alpha_k| \to m \Rightarrow \left.\underbrace{|\sigma_\nu|}_{\le \tau_\nu \to m} \to |\ell|\ \right\} \Rightarrow |\ell| \le m \iff \left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\right| \le \sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$$

$\square$

Απόδειξη (με το κριτήριο σύγκλισης του Cauchy):

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu| < \infty \iff \tau_\nu = \sum_{k=1}^{\nu}|\alpha_k|,\ \nu\in\mathbb{N} \text{ είναι ακολουθία Cauchy}$$

$$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0\in\mathbb{N}\ \forall \nu>\nu_0\ \forall k\in\mathbb{N}: \varepsilon > |\tau_{\nu+k}-\tau_\nu| = \sum_{\mu=\nu+1}^{\nu+k}|\alpha_\mu| \ge \left|\sum_{\mu=\nu+1}^{\nu+k}\alpha_\mu\right|$$

$$\Rightarrow \sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k,\ \nu\in\mathbb{N} \text{ είναι ακολουθία Cauchy} \iff \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu \text{ συγκλίνει}$$

$$\text{και } \sigma_\nu \to \ell \Rightarrow |\sigma_\nu| \to |\ell| \underset{|\sigma_\nu| \le \tau_\nu \to m}{\Longrightarrow} |\ell| \le m \iff \left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\right| < \sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|$$

$\square$

5.2/18

Άσκηση: Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sin\frac{\pi}{\nu}$ συγκλίνει απόλυτα.

Απόδειξη: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \underbrace{\sin\frac{\pi}{\nu}}_{\substack{>0\ \forall \nu\in\mathbb{N} \\ (1)}} \underset{(2)}{\leq} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{\pi}{\nu} = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\frac{3}{2}}} \underset{(3)}{<} \infty$

(3): $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\rho}} < \infty$ για $\rho > 1$

(1): $\sin x > 0 \ \forall x \in (0,\pi)$ και $\frac{\pi}{\nu} \in (0,\pi) \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

(2): $\boxed{|\sin x| \leq |x| \ \forall x \in \mathbb{R}}$:

α) $|x| \geq 1$ και $x = 0$: Προφανές

β) $x \in (0,1)$: αρχότερα

γ) $x \in (-1,0)$: $|\sin x| = -\sin x = \sin(-x) \underset{\beta)}{\leq} (-x) = |x|$

5.2/19

Άσκηση: Να εξετάσετε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν απόλυτα ή υπό συνθήκη:

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sin(\nu \alpha^{\nu})$, $|\alpha|<1$, β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{2^{\nu}}{\nu^{2}}$, γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \sin\frac{1}{\nu}$

Απόδειξη:

α) Αφού $|\sin x| \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin(\nu\alpha^{\nu}) \right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |\sin(\nu\alpha^{\nu})| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |\nu\alpha^{\nu}| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu|\alpha|^{\nu} < \infty,$$

σύμφωνα με το κριτήριο πηλίκων του d'Alembert, αφού

$$\frac{(\nu+1)|\alpha|^{\nu+1}}{\nu|\alpha|^{\nu}} = \frac{\nu+1}{\nu}|\alpha| = \frac{1+\frac{1}{\nu}}{1}|\alpha| \rightarrow |\alpha| < 1$$

5.2/20

β) Η $\alpha_\nu = \frac{2^\nu}{\nu^2}$ είναι γνησίως αύξουσα για $\nu \geq \nu_0 > \frac{1}{\sqrt{2}-1}$,

αφού $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)^2} \frac{\nu^2}{2^\nu} = 2\frac{\nu^2}{(\nu+1)^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{\nu}{\nu+1} > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\nu} < \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \nu > \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ $[\sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow 2 > 1]$

$\underset{(*)}{\Rightarrow} \alpha_\nu = |(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu| \not\to 0 \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\alpha_\nu$ δεν συγκλίνει

[(*): Γενικότερα ισχύει : $\boxed{\alpha_\nu \neq 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}, \ \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \to k > 1 \Rightarrow \alpha_\nu \not\to 0}$:

Αφού $\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \to k > 1 \Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \geq \nu_0 : \left|\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| - k\right| < k-1$

$\Rightarrow \forall \nu \geq \nu_0 : -(k-1)+k = 1 < \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \Rightarrow \forall \nu \geq \nu_0 : |\alpha_\nu| \geq |\alpha_{\nu_0}| > 0$

$\Rightarrow \exists \varepsilon := |\alpha_{\nu_0}| > 0 \ \forall \nu_1 \in \mathbb{N} \ \exists \nu \geq \max\{\nu_0, \nu_1\} \geq \nu_1 : |\alpha_\nu| \geq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \alpha_\nu \not\to 0$.]

γ) Αφού $\sin x > 0$ για $x \in (0, \pi)$ και $\frac{1}{\nu} \in (0,1] \subset (0,\pi)$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$,

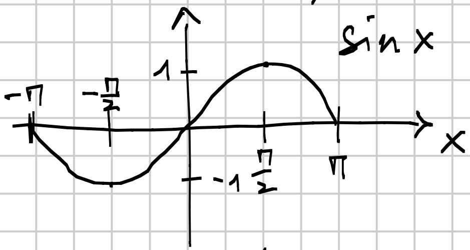
5.2/21

$\sin\frac{1}{\nu} > 0$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Περαιτέρω, αφού $|\sin x| \le |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 < \sin\frac{1}{\nu} \le \frac{1}{\nu} \to 0$

$\Rightarrow \sin\frac{1}{\nu} \to 0$.

Τέλος, αφού $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x < y \Rightarrow \sin x < \sin y$



και $\frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{\nu} \in (0,1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\sin\frac{1}{\nu+1} < \sin\frac{1}{\nu}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς, η $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \sin\frac{1}{\nu}$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του Leibniz.

Απ' την άλλη γνωρίζοντας ότι $\nu \sin\frac{1}{\nu} \to 1$ (βλ. προηγούμενα) και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \infty$ έχουμε από το οριακό κριτήριο σύγκρισης (Θ. [2.24]) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sin\frac{1}{\nu} = \infty$.

Παράρτημα: Μερικά στοιχεία για τα liminf και limsup (πβ. και [Ντ., §1.12])

Ορισμός [1.75] $\ell \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης ακολουθίας $(\alpha_\nu) \subset \mathbb{R}$
$:\Longleftrightarrow \exists$ υπακολουθία $(\alpha_{k_\nu}) \subset (\alpha_\nu)$: $\alpha_{k_\nu} \to \ell$

Θεώρημα Bolzano-Weierstrass: Κάθε φραγμένη ακολουθία $(\alpha_\nu) \subset \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.

$\Longrightarrow$ Το σύνολο A' των σημείων συσσώρευσης (σ.σ.) μιας φραγμένης ακολουθίας $(\alpha_\nu) \subset \mathbb{R}$ δεν είναι κενό: $A' \neq \emptyset$.

Πρόταση 1: Το σύνολο A' των σ.σ. μιας φραγμένης ακολουθίας είναι φραγμένο.

Απόδειξη: (α_ν) φραγμένη $\Longrightarrow \exists\, M \geq 0 : |\alpha_\nu| \leq M \;\forall \nu \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ $|\alpha_{k_\nu}| \leq M \;\forall \nu \in \mathbb{N}$ για κάθε υπακολουθία $(\alpha_{k_\nu}) \subset (\alpha_\nu)$.

Άρα: $\ell \in A' \Leftrightarrow \exists (\alpha_{k_\nu}) \subset (\alpha_\nu)$: $\alpha_{k_\nu} \to \ell \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \underbrace{|\alpha_{k_\nu}|}_{\leq M} \to |\ell| \end{array}\right\} \Rightarrow |\ell| \leq M$

$\square$

Από τις δύο τελευταίες προτάσεις συνεπάγεται σύμφωνα με το Αξίωμα Πληρότητας: $\exists!\ \sup A', \inf A' \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε για μια φραγμένη ακολουθία $(\alpha_\nu) \subset \mathbb{R}$

$$\liminf \alpha_\nu := \inf A' \in \mathbb{R}, \quad \limsup \alpha_\nu := \inf A' \in \mathbb{R}.$$

<u>Πρόταση 2</u>: Έστω $(\alpha_\nu) \subset \mathbb{R}$ φραγμένη $\Rightarrow \exists (\alpha_{k_\nu}), (\alpha_{\lambda_\nu}) \subset (\alpha_\nu)$:

$$\alpha_{k_\nu} \to \limsup \alpha_\nu, \quad \alpha_{\lambda_\nu} \to \liminf \alpha_\nu.$$

<u>Απόδειξη</u> (για $\limsup \alpha_\nu$): Αφού $\limsup \alpha_\nu = \sup A'$, ισχύει

$\forall \mu \in \mathbb{N}\ \exists\ \alpha'_\mu \in A'$: $\sup A' - \frac{1}{\mu} < \alpha'_\mu \leq \sup A' < \sup A' + \frac{1}{\mu}$,

δηλ. $|\alpha'_\mu - \sup A'| < \frac{1}{\mu}$. Από την άλλη $\forall \mu \in \mathbb{N}\ \exists\ (\alpha^{(\mu)}_{\ell_\nu}) \subset (\alpha_\nu)$:

$\alpha^{(\mu)}_{\ell_\nu} \to \alpha'_\mu$, δηλ. $\forall \mu \in \mathbb{N}\ \exists \mu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \mu_0$: $|\alpha^{(\mu)}_{\ell_\nu} - \alpha'_\mu| < \frac{1}{\mu}$

5.2/24

$\Rightarrow \forall \mu \in \mathbb{N}\ \exists \mu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \mu_0 \quad |\alpha_{\ell_\nu}^{(\mu)} - \sup A'| < \frac{2}{\mu}$.

Επιλέγοντας για κάθε $\mu \in \mathbb{N}$ ένα $\nu > \mu_0$ ούτως ώστε για $\alpha_{\ell_\nu}^{(\mu)} = \alpha_{\kappa_\mu}$ να ισχύει $\kappa_\mu > \kappa_{\mu-1}\ \forall \mu \in \mathbb{N}, \mu \geq 2$, κατασκευάζουμε μία υπακολουθία $(\alpha_{\kappa_\mu}) \subset (\alpha_\nu)$ με $|\alpha_{\kappa_\mu} - \sup A'| < \frac{2}{\mu}\ \forall \mu \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \alpha_{\kappa_\mu} \to \sup A'$ για $\mu \to \infty$. $\square$

Από την Πρόταση 2 συνεπάγεται $\sup A' = \max A'$, $\inf A' = \min A'$.

<u>Πρόταση 3</u>: Έστω (α_ν) φραγμένη. Τότε

$$\liminf \alpha_\nu = \limsup \alpha_\nu = \ell \in \mathbb{R} \iff \lim \alpha_\nu = \ell$$

<u>Απόδειξη</u>: $\Leftarrow$: Θ. [1.43] $\Rightarrow$: Δείχνουμε ισοδύναμα: η (α_ν) δεν συγκλίνει $\Rightarrow \exists\ (\alpha_{\kappa_\nu}), (\alpha_{\lambda_\nu}) \subset (\alpha_\nu)$ με $\alpha_{\kappa_\nu} \to \ell_1$, $\alpha_{\lambda_\nu} \to \ell_2$ και $\ell_1 \neq \ell_2$ ο

Αφού η (α_ν) είναι φραγμένη, υπάρχει $(\alpha_{\kappa_\nu}) \subset (\alpha_\nu)$ με $\alpha_{\kappa_\nu} \to \ell_1$, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass. Αφού η (α_ν) δεν συγκλίνει, $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, \nu \in \mathbb{N}\ |\alpha_\nu - \ell_1| \geq \varepsilon$, δηλ. $\exists (\alpha_{\mu_\nu}) \subset (\alpha_\nu)$ με $\alpha_{\mu_\nu} \in [\inf\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}, \ell_1 - \varepsilon] \cup [\ell_1 + \varepsilon, \sup\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}]\ \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano – Weierstrass, $\exists (\alpha_{\lambda_\nu}) \subset (\alpha_{\mu_\nu}) \subset (\alpha_\nu)$ με $\alpha_{\lambda_\nu} \to \ell_2 \in [\inf\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}, \ell_1 - \varepsilon] \cup [\ell_1 + \varepsilon, \sup\{\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}]$

$\Longrightarrow \ell_1 \neq \ell_2$. (πβ. και [Nτ., Εφ. 2/§1.10], [Nτ. Θ. 1.84]). $\square$

<u>Πρόταση 4</u>:
$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{2\nu-1} \to \ell_1 \\ \alpha_{2\nu} \to \ell_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \liminf \alpha_\nu = \min\{\ell_1, \ell_2\} \\ \limsup \alpha_\nu = \max\{\ell_1, \ell_2\} \end{array}\right.$$

<u>Απόδειξη</u>: Για ℓ_1 ή $\ell_2 \in \{\pm\infty\}$ προφανές. Για $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, έστω $(\alpha_{\kappa_\nu}) \subset (\alpha_\nu)$ με $\alpha_{\kappa_\nu} \to \ell$. Η (α_{κ_ν}) θα έχει άπειρους όρους με ζυγούς δείκτες κ_ν ή άπειρους όρους με μονούς δείκτες κ_ν, δηλ. θα έχει μια υπακολουθία $(\alpha_{\kappa_{\lambda_\nu}}) \subset (\alpha_{2\nu})$ ή μια υπακολουθία $(\alpha_{\kappa_{\mu_\nu}}) \subset (\alpha_{2\nu-1})$, και άρα (Θ. [1.43]) $\ell = \ell_2$ ή $\ell = \ell_1$, δηλ. $A' = \{\ell_1, \ell_2\}$. $\square$

<u>Πόρισμα 5</u> ([Ντ., Εφ. 3. β/ §1.12]): $\lim \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \ell \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \lim \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = \ell$

$\boxed{5.2/26}$

<u>Απόδειξη</u> : $\not\Leftarrow$: Για την $(\alpha_\nu) \subset \mathbb{R}$ με $\alpha_{2\nu-1} = \frac{1}{2^\nu}$, $\alpha_{2\nu} = \frac{1}{2^{\nu-1}}$ έχουμε

$$\frac{\alpha_{2\nu}}{\alpha_{2\nu-1}} = \frac{2^\nu}{2^{\nu-1}} = 2 \text{ και } \frac{\alpha_{2\nu+1}}{\alpha_{2\nu}} = \frac{2^{\nu-1}}{2^{\nu+1}} = \frac{1}{4} \underset{\text{Προτ. } 4}{\Longrightarrow} \liminf \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{1}{4} \neq$$

$$\neq 2 = \limsup \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \underset{\text{Προτ.}}{\Longrightarrow} \nexists \lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} ,$$

ενώ $\sqrt[2\nu]{\alpha_{2\nu}} = \left(\frac{2}{2^\nu}\right)^{\frac{1}{2\nu}} = \frac{(\sqrt{2})^{\frac{1}{\nu}}}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

και $\sqrt[2\nu-1]{\alpha_{2\nu-1}} = \frac{1}{(2^\nu)^{\frac{1}{2\nu-1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2})^{\frac{1}{2\nu-1}}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

και άρα (Προτ. 4, 3 ή Θ. [1.47]) $\lim \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\Longrightarrow$: Επειδή ισχύει (απόδειξη πιο κάτω)

$$\liminf \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \underset{(1)}{\leq} \liminf \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \underset{(2)}{\leq} \limsup \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \underset{(3)}{\leq} \limsup \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \quad (*)$$

το $\lim \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \ell$ συνεπάγεται $\lim \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = \ell$ (Προτ. 3 για $\ell \in \mathbb{R}$, για $\ell = \infty$:

5.2/27

$\lim \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \infty \Rightarrow \liminf \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \infty \underset{(*)}{\Rightarrow} \liminf \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = \infty \underset{(**)}{\Rightarrow} \lim \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = \infty$,

$(**)$: Έστω ότι $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall \nu_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, \nu > \nu_0 : \beta_\nu := \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \exists (\beta_{k_\nu}) \subset (\beta_\nu)$:
$\beta_{k_\nu} \in [0, \frac{1}{\varepsilon}]\ \forall \nu \in \mathbb{N} \underset{\text{Bolzano-Weierstrass}}{\Longrightarrow} \exists (\beta_{k_{\lambda_\nu}}) \subset (\beta_{k_\nu}) \subset (\beta_\nu) : \beta_{k_{\lambda_\nu}} \to \beta \in [0, \frac{1}{\varepsilon}]$ ↯

$(*)$: Η (2) είναι προφανής από τον ορισμό. Η (3) είναι προφανής για $\limsup \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \infty$. Έστω λοιπόν $\limsup \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \ell \in [0, \infty) \Leftrightarrow$ η $(\gamma_\nu) := \left(\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right|\right)$ είναι φραγμένη $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \gamma_\nu < \ell + \varepsilon$ [γιατί αν $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall \nu_0 \in \mathbb{N}$ $\exists\, \nu > \nu_0 : \gamma_\nu \geq \ell + \varepsilon$, τότε θα υπήρχε $(\gamma_{k_\nu}) \subset (\gamma_\nu)$ με $\gamma_{k_\nu} \geq \ell + \varepsilon\ \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\underset{\text{Bolz.-Weier.}}{\Longrightarrow} \exists (\gamma_{k_{\lambda_\nu}}) \subset (\gamma_{k_\nu}) \subset (\gamma_\nu) : \gamma_{k_{\lambda_\nu}} \to \ell' \geq \ell + \varepsilon > \ell$ ↯] $\Rightarrow |\alpha_{\nu_0+k+1}| < (\ell+\varepsilon)|\alpha_{\nu_0+k}|\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow |\alpha_{\nu_0+k+1}| < (\ell+\varepsilon)^k |\alpha_{\nu_0+1}|\ \forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
$\Rightarrow |\alpha_\nu| \leq (\ell+\varepsilon)^{\nu-\nu_0-1} |\alpha_{\nu_0+1}|\ \forall \nu > \nu_0 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \leq (\ell+\varepsilon)\left(\sqrt[\nu]{\frac{|\alpha_{\nu_0+1}|}{(\ell+\varepsilon)^{\nu_0+1}}}\right)\ \forall \nu > \nu_0$
$\Rightarrow \limsup \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \leq \ell + \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \limsup \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \leq \ell$.

Απ' την άλλη, αν $\liminf \gamma_\nu = 0$, η (1) είναι προφανής.

Έστω $\liminf \gamma_\nu = m \in (0, \infty) \Rightarrow \forall \varepsilon \in (0, m)\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \gamma_\nu > m - \varepsilon$
$[\exists\, \varepsilon \in (0, m)\ \forall \nu_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, \nu > \nu_0 : \gamma_\nu \leq m - \varepsilon \Rightarrow$ ↯ $] \Leftrightarrow \forall \nu > \nu_0 : |\alpha_{\nu+1}| > (m-\varepsilon)|\alpha_\nu|$
$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : |\alpha_{\nu_0+k+1}| > (m-\varepsilon)|\alpha_{\nu_0+k}| > (m-\varepsilon)^k |\alpha_{\nu_0+1}|$

$\Rightarrow \forall \nu>\nu_0: |\alpha_\nu| \geq (m-\varepsilon)^{\nu-\nu_0-1}|\alpha_{\nu_0+1}| \Leftrightarrow \forall \nu>\nu_0: \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \geq (m-\varepsilon)\left(\sqrt[\nu]{\frac{|\alpha_{\nu_0+1}|}{(m-\varepsilon)^{\nu_0+1}}}\right)$

$\Rightarrow \liminf \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \geq m-\varepsilon \quad \forall\, \varepsilon\in(0,m) \Rightarrow \liminf \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \geq m.$

Τέλος, έστω $\liminf \gamma_\nu = \infty \Rightarrow \lim \gamma_\nu = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\, \exists \nu_0\in\mathbb{N}\, \forall \nu>\nu_0: |\alpha_{\nu+1}| > \frac{1}{\varepsilon}|\alpha_\nu|$

$\Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N}: |\alpha_{\nu_0+k+1}| > \frac{1}{\varepsilon}|\alpha_{\nu_0+k}| \overset{(**)}{>} \frac{1}{\varepsilon^k}|\alpha_{\nu_0+1}| \Rightarrow \forall \nu>\nu_0: |\alpha_\nu| \geq \frac{1}{\varepsilon^\nu}\left(\varepsilon^{\nu_0+1}|\alpha_{\nu_0+1}|\right)$

$\Leftrightarrow \forall \nu>\nu_0: \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \geq \frac{1}{\varepsilon}\sqrt[\nu]{\varepsilon^{\nu_0+1}|\alpha_{\nu_0+1}|} \Rightarrow \exists \nu_1\geq\nu_0\, \forall \nu>\nu_1: \sqrt[\nu]{\varepsilon^{\nu_0+1}|\alpha_{\nu_0+1}|} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \nu>\nu_1: \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \geq \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{2}$, δηλ. $\lim \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = \infty \Rightarrow \liminf \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = \infty.$ $\square$

Απόδειξη Θ. [2.31]:

α) $\limsup \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \alpha < 1 \Rightarrow \exists \nu_0\in\mathbb{N}\, \forall \nu>\nu_0: \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < \alpha + \frac{1-\alpha}{2} =: q < 1$ (βλ. (*) στην προηγούμενη απόδειξη) και συνεχίζουμε όπως στην απόδειξη του Πορ. του Θ. [2.29], βλ. Σημ. 5.1/3-5.

β) $\liminf \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \beta > 1 \Rightarrow \exists \nu_0\in\mathbb{N}\, \forall \nu>\nu_0: \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} > \beta - \frac{\beta-1}{2} =: q > 1$ (βλ. (*) στην προηγούμενη απόδειξη) και συνεχίζουμε όπως στην αποδ. του Πορ. Θ. [2.29]

γ) Αρκούν τα αντιπαραδείγματα του Πορ. Θ. [2.29] $\square$

Απόδειξη Θ. [2.36]:

α) $\limsup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \kappa < 1 \Rightarrow \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} < \kappa + \frac{1-\kappa}{2} =: q < 1$
(βλ. (*) στην αποδ. της Προτ. 5) και συνεχ. όπως στην αποδ. Πορ. Θ. [2.34],
Σημ. 5.1/6-7.

β) $\limsup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \kappa > 1 \Rightarrow \exists\ (\alpha_{\kappa_\nu}) \subset (\alpha_\nu)$ με $\sqrt[\kappa_\nu]{\alpha_{\kappa_\nu}} \to \kappa > 1 \Rightarrow \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}$
$\forall \nu > \nu_0 : \sqrt[\kappa_\nu]{\alpha_{\kappa_\nu}} \geq 1 \Rightarrow \alpha_{\kappa_\nu} \geq 1 \Rightarrow \alpha_{\kappa_\nu} \not\to 0 \Rightarrow \alpha_\nu \not\to 0$
$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ δεν συγκλίνει $\underset{\alpha_\nu \geq 0\ \forall \nu \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \infty$

γ) Αρκούν τα αντιπαραδείγματα του Πορ. Θ. [2.34]. $\square$