Εβδομάδα 6η / Θεωρία / 12.12.11

[Κεφ. 3] Όριο συνάρτησης

[§3.1] Γενικά

Από εδώ και πέρα όχι ακολουθίες $(\alpha_\nu): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ή σειρές $(\sigma_\nu)\left(= \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu\right): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k$ αλλά πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

$$f : D(f) \to R(f) \quad \text{με} \quad \underbrace{D(f)}_{\text{πεδίο ορισμού}} \subseteq \mathbb{R}, \quad \underbrace{R(f)}_{\text{σύνολο (ή πεδίο) τιμών}} \subseteq \mathbb{R}$$

Παρατήρηση: Η $f : D(f) \to R(f)$, όπου $R(f)$ είναι το σύνολο τιμών της f, είναι συνάρτηση "επί". Συνήθως την γράφουμε ως $f : D(f) \to \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{R}$ είναι το (κανονικά λεγόμενο πεδίο τιμών ή εδώ) σύνολο αφίξεως. Ισχύει δηλ. $R(f) \subseteq \mathbb{R}$, αλλά όχι απαραίτητα $R(f) = \mathbb{R}$.

Περιοχές σημείων $\xi \in \mathbb{R}$ και του $\pm\infty$:

περιοχή του $\xi \in \mathbb{R}$: $\quad N_\delta(\xi) := \{x \in \mathbb{R} : |x-\xi| < \delta\}$, $\delta > 0$

διακεκομμένη περ. —"— : $\quad N_\delta^*(\xi) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-\xi| < \delta\}$

$\left(\Rightarrow \quad N_\delta(\xi) = (\xi-\delta, \xi+\delta), \quad N_\delta^*(\xi) = N_\delta(\xi) \setminus \{\xi\} = (\xi-\delta, \xi) \cup (\xi, \xi+\delta) \right)$

Πλευρικές περιοχές του $\xi \in \mathbb{R}$:

δεξιά περιοχή του $\xi \in \mathbb{R}$: $\quad N_{\delta+}(\xi) := [\xi, \xi+\delta) = \{x \in \mathbb{R} : \xi \leq x < \xi+\delta\}$

δεξιά διακ. περ. —"— : $\quad N_{\delta+}^*(\xi) := (\xi, \xi+\delta) = \{x \in \mathbb{R} : \xi < x < \xi+\delta\}$

αριστερή περιοχή του $\xi \in \mathbb{R}$: $\quad N_{\delta-}(\xi) := (\xi-\delta, \xi] = \{x \in \mathbb{R} : \xi-\delta < x \leq \xi\}$

αριστερή διακ. περ. —"— : $\quad N_{\delta-}^*(\xi) := (\xi-\delta, \xi) = \{x \in \mathbb{R} : \xi-\delta < x < \xi\}$

Για $A \subseteq \mathbb{R}$ μη άνω φραγμένο, γράφουμε $\sup A = \infty$

— " — μη κάτω φραγμένο, — " — $\inf A = -\infty$

Το σύνολο $\tilde{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ λέγεται <u>γενικευμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών</u> (με $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

(τα "$-\infty$", "∞" ονομάζονται καμιά φορά "κατ' εκλογή σημεία")

περιοχή του ∞ : $N_\alpha(\infty) = \{x \in \tilde{\mathbb{R}} : x > \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

διακτ. περ. — " — : $N^*_\alpha(\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > \alpha\} = (\alpha, \infty)$

περιοχή του $-\infty$: $N_\alpha(-\infty) = \{x \in \tilde{\mathbb{R}} : x < \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

διακτ. περ. — " — : $N^*_\alpha(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x < \alpha\} = (-\infty, \alpha)$

($\Rightarrow$ $N_\alpha(\infty) = (\alpha, \infty) \cup \{\infty\} = N^*_\alpha(\infty) \cup \{\infty\}$,

$N_\alpha(-\infty) = \{-\infty\} \cup (-\infty, \alpha) = \{-\infty\} \cup N^*_\alpha(-\infty)$)

<u>Ορισμός</u>: α) $\xi \in \mathbb{R}$ <u>σημείο συσσώρευσης</u> (σ.σ.) του <u>συνόλου</u> $A \subseteq \mathbb{R}$

$$:\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 : N_\delta^*(\xi) \cap A \neq \emptyset .$$

[$\Longleftrightarrow$ κάθε δακτυλική περιοχή του ξ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A]

β) Το σύνολο των σ.σ. του A λέγεται <u>παράγωγο σύνολο του A</u> και συμβολίζεται με A'.

γ) Η ένωση του A και του A' λέγεται <u>θήκη του A</u> και συμβολίζεται με $\overline{A}$.

δ) $\xi \in \mathbb{R}$ <u>σ.σ.</u> του $A \subseteq \mathbb{R}$ <u>από αριστερά</u>

$$:\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 : N_{\delta-}^*(\xi) \cap A = (\delta - \xi, \xi) \cap A \neq \emptyset$$

ε) $\xi \in \mathbb{R}$ <u>σ.σ.</u> του $A \subseteq \mathbb{R}$ <u>από δεξιά</u>

$$:\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 : N_{\delta+}^*(\xi) \cap A = (\xi, \xi + \delta) \cap A \neq \emptyset$$

στ) $\xi \in A$ <u>μεμονωμένο σημείο</u> του <u>συνόλου</u> $A \subseteq \mathbb{R}$

$$:\Longleftrightarrow \exists\, \delta > 0 : \ N_\delta^*(\xi) \cap A = \emptyset$$

Σχετικά ισχύουν τα εξής:

α΄) Ένα σ.σ. του A μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο A.

π.χ. $A = (0,1] \Rightarrow A' = [0,1]$, $A = [0,1] \Rightarrow A' = [0,1]$

β΄) $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του A $\Longleftrightarrow$ ξ σ.σ. του A από αριστερά

ή ξ σ.σ. του A από δεξιά (ή και τα δύο)

γ΄) $\xi \in A \Rightarrow$ ή ξ σ.σ. του A ή ξ μεμονωμένο σημείο του A

π.χ. το $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία,

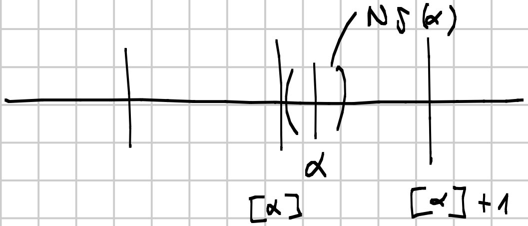
αφού $\forall \nu \in \mathbb{Z}$: $\left(\left(\nu - \frac{1}{2}, \nu\right) \cup \left(\nu, \nu + \frac{1}{2}\right)\right) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$

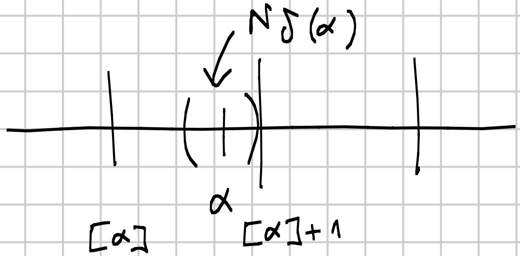
δ') $\exists\, A \subseteq \mathbb{R} : A' = \emptyset$

π.χ. $\mathbb{Z}' = \emptyset$, αφού $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} \underset{\delta)}{=} \emptyset$ και $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Z}' = \emptyset$:

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ και $\delta = \min\{\alpha - [\alpha], [\alpha]+1-\alpha\}$

$\Rightarrow N_\delta^*(\alpha) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.





[δ'') Τυχαίο πεπερασμένο σύνολο δεν έχει σ.σ. :

Έστω $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu\}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$.

(i) Με $\delta = \min\{|\alpha_i - \alpha_j| : i,j \in \{1,\dots,\nu\}, i \neq j\}$

έχουμε $((\alpha_i - \delta, \alpha_i) \cup (\alpha_i + \delta)) \cap A = \emptyset$, δηλ.

όλα τα $\alpha_i \in A$ είναι μεμονωμένα σημεία.

(ii) Έστω $\alpha \in \mathbb{R} \setminus A$. Με $\delta = \min\{|\alpha - \alpha_i| : i \in \{1, \dots, \nu\}\}$ έχουμε $\big((\alpha - \delta, \alpha) \cap (\alpha, \alpha + \delta)\big) \cap A = \emptyset$.

δ''') $\emptyset' = \emptyset$: $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \delta > 0\ \ N_\delta^*(\alpha) \cap \emptyset = \emptyset$]

ε') $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A κάτω φραγμένο $\Rightarrow \inf A \in \bar{A}$

<u>Απόδειξη</u>: $m = \inf A \iff \begin{cases} \alpha)\ m \leq x \ \forall x \in A \\ \beta)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A : x < m + \varepsilon \end{cases}$

$m \notin A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A : \underbrace{m < x < m + \varepsilon}_{\iff x \in N^*_{\varepsilon+}(m) \subset N^*_\varepsilon(m)} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in N^*_\varepsilon(m) \cap A$

$\iff \forall \varepsilon > 0 : N^*_\varepsilon(m) \cap A \neq \emptyset$ □

στ') $\boxed{\xi \in \mathbb{R} \text{ σ.σ. του } A \subseteq \mathbb{R} \iff \exists (x_\nu) \subset A \setminus \{\xi\} : x_\nu \to \xi.}$

<u>Παρατήρηση</u>: <u>Αυτή η ισοδυναμία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εναλλακτικός ορισμός του σημείου συσσώρευσης.</u>

<u>Απόδειξη</u> : $\Rightarrow$: $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $A \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : N_\delta^*(\xi) \cap A \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \ \exists \ x_\delta \in A : 0 < |x_\delta - \xi| < \delta$

$\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists \ x_\delta \in A \setminus \{\xi\} : \ |x_\delta - \xi| < \delta$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \exists \ x_\nu \in A \setminus \{\xi\} : \ |x_\nu - \xi| < \frac{1}{\nu}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu_0 \in \mathbb{N}$ (με $\nu_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ συμφ. με την Αρχιμήδεια Ιδιότητα)

$\forall \nu \geq \nu_0 : \ |x_\nu - \xi| < \frac{1}{\nu} \leq \frac{1}{\nu_0} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow x_\nu \to \xi$

$\Leftarrow$: Έστω $\delta > 0$. Τότε $\exists \ \nu_0 \in \mathbb{N}$ και $x_{\nu_0} \in A \setminus \{\xi\} : |x_{\nu_0} - \xi| < \delta$

$\Rightarrow x_{\nu_0} \in N_\delta^*(\xi) \cap A \Rightarrow N_\delta^*(\xi) \cap A \neq \emptyset$ $\square$

ζ') <u>$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ μη άνω φραγμένο</u> $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \exists \ x \in A : \ x > \alpha$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad N_\alpha^*(\infty) \cap A \neq \emptyset \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \exists (x_\nu) \subset A : \ x_\nu \to \infty$

$\Leftrightarrow$: <u>Το ∞</u> ($\notin \mathbb{R}$) <u>είναι</u> (γενικευμένο) <u>σ.σ. του A</u>

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ μη κάτω φραγμένο $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \exists x \in A : x < \alpha$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad N^*_\alpha(-\infty) \cap A \neq \emptyset \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \exists (x_\nu) \subset A : x_\nu \to -\infty$

$\Leftrightarrow$: Το $-\infty$ ($\notin \mathbb{R}$) είναι (γενικευμένο) σ.σ. του A

[Η απόδειξη των (1), (2) είναι ανάλογη με αυτήν στο στ').

Π.χ. (1): $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \exists x \in A : x > \alpha \Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} \ \exists x_\nu \in A : x_\nu > \nu \underset{\text{Θ. [1.72]}}{\overset{\nu \to \infty,}{\Longrightarrow}} x_\nu \to \infty$

$\Rightarrow \exists (x_\nu) \subset A : x_\nu \to \infty \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : x_{\nu_0} > \alpha$

$\underset{(x_\nu) \subset A}{\Longrightarrow} \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \exists x (= x_{\nu_0}) \in A : x > \alpha \quad \square$]

Από τα στ') και ζ') προκύπτει ο ακόλουθος δυνατός (possible) (γενικευμένος)

Ορισμός [3.1]

$\xi \in \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (γενικευμένο όταν $\xi \in \{\pm\infty\}$)

σημείο συσσώρευσης του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$

$:\Leftrightarrow \exists (x_\nu) \subset A \setminus \{\xi\} : x_\nu \to \xi$

[§3.2] Ακολουθιακός ορισμός σύγκλισης κατά Heine

Έστω $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ και $(x_\nu) \subset D(f)$.
Τότε η $(f(x_\nu)) \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται <u>αντίστοιχη της (x_ν) ακολουθία τιμών της f.</u>

<u>Θεώρημα</u> [3.3]: Έστω $f : D(f) \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \tilde{\mathbb{R}}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$.
Αν για κάθε $(x_\nu) \subset D(f) \setminus \{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$ η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_\nu))$ συγκλίνει, τότε όλες συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $(x_\nu), (y_\nu) \subset D(f) \setminus \{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$, $y_\nu \to \xi$
και $f(x_\nu) \to \ell \in \tilde{\mathbb{R}}$, $f(y_\nu) \to m \in \tilde{\mathbb{R}}$ (1)

6.1.11

$x_\nu \to \xi,\ y_\nu \to \xi \implies \omega_\nu \to \xi$, όπου $(\omega_\nu) := (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_\nu, y_\nu, \dots)$

$\implies f(\omega_\nu) \to n \in \tilde{\mathbb{R}} \implies f(x_\nu) \to n,\ f(y_\nu) \to n$

$\underset{(1)}{\implies} n = m,\ n = \ell \implies \ell = m$ $\square$

Ακολουθιακός ορισμός της σύγκλισης συνάρτησης κατά Heine [3.4]:

Έστω $f : D(f) \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \tilde{\mathbb{R}}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$.

Η f τείνει στο $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$ (ή συγκλίνει στο ℓ ή έχει όριο το ℓ, όταν $\ell \in \mathbb{R}$) όταν το x τείνει στο ξ,

$$f(x) \to \ell \text{ όταν } x \to \xi \quad \text{ή} \quad f(x) \xrightarrow[x \to \xi]{} \ell \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to \xi} f(x) = \ell$$

$$:\iff \forall\, (x_\nu) \subset D(f) \setminus \{\xi\},\ x_\nu \to \xi :\ f(x_\nu) \to \ell .$$

Παρατηρήσεις: α) Αν το ξ είναι μεμονωμένο σημείο η έννοια του ορίου $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει.

β) Η συνθήκη $x_\nu \to \xi \Rightarrow f(x_\nu) \to \ell$ πρέπει να ισχύει **για κάθε** $(x_\nu) \subset D(f)\setminus\{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$

Παράδειγμα [Εφ. §3.2/1.]:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}' = \mathbb{R}$

$x_\nu = \dfrac{1}{\nu\pi + \frac{\pi}{2}} \longrightarrow 0$, $f(x_\nu) = \sin\left(\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^\nu$ δεν συγκλίνει

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει

[Εναλλακτικά: $x_\nu = \dfrac{1}{\nu\pi} \to 0$, $y_\nu = \dfrac{2}{(1+4\nu)\pi} \longrightarrow 0$

και $f(x_\nu) = 0 \to 0$, $f(y_\nu) = 1 \to 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει]