[§ 3.2] Ακολουθιακός ορισμός της σύγκλισης (συνέχεια)



<u>Άσκηση</u> [3.2 β)]: Να εξετάσετε αν έχει νόημα η έκφραση $\lim_{x\to\xi} f(x)$ για $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\dfrac{x-1}{\sqrt{1+x}}}$ και $\xi = 2$, $\xi = -\infty$

<u>Λύση</u>: $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-2}{x+2} \geq 0,\ x \neq -2,\ 1+x > 0,\ \dfrac{x-1}{\sqrt{1+x}} \geq 0 \right\}$

$= \{ x \in \mathbb{R} : (x-2)(x+2) \geq 0,\ x \geq 1 \} = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \} = [2, \infty)$

Αφού το $\xi = 2$ είναι σ.σ. του $[2,\infty)$ το $\lim_{x\to 2} f(x)$ έχει νόημα (ανεξαρτήτως αν υπάρχει ή όχι) [και συγκεκριμένα ισχύει $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x)$ $\left( = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right.$, όπως θα δούμε αργότερα$\left.\right)$].

Αντιθέτως, αφού το $-\infty$ δεν είναι σ.σ. του $D(f)$ (επειδή π.χ.

$N_\alpha^*(-\infty) = (-\infty, 1) \cap [2, \infty) = \emptyset$ ή επειδή $\nexists\ (x_\nu) \subset D(f) : x_\nu \to -\infty)$

το $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ δεν έχει νόημα. $\boxed{6.2/2}$

<u>Άσκηση</u> [3.4 ii)]: Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$$

<u>Λύση</u>: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$ Τα $-\infty, \infty$ είναι (γενικευμένα)

σ.σ. του $D(f)$ (αφού $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ $(-\infty, \alpha) \cap D(f) \neq \emptyset$, $(\alpha, \infty) \cap D(f) \neq \emptyset$)

Έστω $(x_\nu) \subset D(f)$ με $x_\nu \to -\infty$ (ή $\infty$). Τότε $f(x_\nu) = \dfrac{\sin x_\nu}{x_\nu}$

$$\Rightarrow |f(x_\nu)| = \frac{|\sin x_\nu|}{|x_\nu|} \leq \frac{1}{|x_\nu|} \longrightarrow 0 \iff f(x_\nu) \to 0,$$

αφού $x_\nu \to -\infty$ (ή $\infty$) $\Rightarrow \dfrac{1}{x_\nu} \to 0 \iff \dfrac{1}{|x_\nu|} \to 0$.

<u>Άσκηση</u>: Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ | 6.2/3

<u>Λύση</u>: $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x \Rightarrow D(f)=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2+1\geq 0\}=\mathbb{R}$

(και $\infty$ είναι σ.σ. του $\mathbb{R}$) $\quad f(x)=\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

Έστω $x_\nu\to-\infty \Rightarrow \exists\, \nu_0\in\mathbb{N}\ \forall \nu\geq\nu_0:\ x_\nu<0$

$$\Rightarrow \forall \nu\geq\nu_0:\quad 0\leq f(x_\nu)=\frac{1}{\sqrt{x_\nu^2+1}+|x_\nu|}<\frac{1}{2|x_\nu|}\longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=0$$

**Ορισμός [3.11]**: Έστω $f : D(f) \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$ από αριστερά (αντίστοιχα, από δεξιά). Η $f$ έχει όριο το $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$ στο σημείο $\xi$ από αριστερά (αντίστοιχα, από δεξιά)

$$\lim_{x \to \xi-} f(x) = \ell \quad [\text{ή } f(x) \to \ell \text{ για } x \uparrow \xi] \quad \left(\text{αντ., } \lim_{x \to \xi+} f(x) = \ell \ [\text{ή } f(x) \to \ell \text{ για } x \downarrow \xi]\right)$$

$$:\Longleftrightarrow \forall\, (x_\nu) \subset D(f) \cap (-\infty, \xi),\ x_\nu \to \xi : \ f(x_\nu) \to \xi$$

(αντ., — " — $D(f) \cap (\xi, \infty)$ —— " —— )

Τα όρια $\lim_{x \to \xi-} f(x)$, $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ ονομάζονται πλευρικά όρια.

**Θεώρημα [3.13]**: Έστω $f : D(f) \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ από αριστερά και από δεξιά. Τότε

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell \in \tilde{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow \lim_{x \to \xi-} f(x) = \ell = \lim_{x \to \xi+} f(x)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Προφανώς αν το $\xi \in \mathbb{R}$ είναι σ.σ. μόνο από αριστερά (αντ., δεξιά) ισχύει $\lim\limits_{x\to\xi-} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ (αντ., $\lim\limits_{x\to\xi+} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$)

(Για τον ίδιο λόγο η έννοια του πλευρικού ορίου έχει νόημα μόνο για σ.σ. $\xi \in \mathbb{R}$.)

6.2/5

<u>Απόδειξη</u>: $\Rightarrow$: Έστω $(x_\nu) \subset D(f) \cap (-\infty, \xi)$ με $x_\nu \to \xi \Rightarrow$ $(x_\nu) \subset D(f) \setminus \{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi \Rightarrow f(x_\nu) \to \ell$. Άρα $\lim\limits_{x\to\xi-} f(x) = \ell$.

Αντίστοιχα, για κάθε $(x_\nu) \subset D(f) \cap (\xi, \infty) \subset D(f) \setminus \{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$ ισχύει $f(x_\nu) \to \ell$ και άρα $\lim\limits_{x\to\xi+} f(x) = \ell$.

$\Leftarrow$: Έστω $(x_\nu) \subset D(f) \setminus \{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$. Τότε

ή (α) $\exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 : x_\nu \in D(f) \cap (-\infty, \xi)$

ή (β) $\exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 : x_\nu \in D(f) \cap (\xi, \infty)$

ή (γ) $\forall \nu_0 \in \mathbb{N} \ \exists \nu, \mu > \nu_0 : x_\nu \in D(f) \cap (-\infty, \xi), x_\mu \in D(f) \cap (\xi, \infty)$

[6.2/6]

Αν (α) τότε $(x_{\nu+\nu_0}) \subset D(f) \cap (-\infty, \xi)$ με $x_{\nu+\nu_0} \to \xi$

$\Rightarrow f(x_{\nu+\nu_0}) \to \ell \Rightarrow f(x_\nu) \to \ell$

Αν (β) τότε $(x_{\nu+\nu_0}) \subset D(f) \cap (\xi, \infty)$ με $x_{\nu+\nu_0} \to \xi$

$\Rightarrow f(x_{\nu+\nu_0}) \to \ell \Rightarrow f(x_\nu) \to \ell$

Αν (γ) τότε $\exists\ (x_{\kappa_\nu}), (x_{\lambda_\nu}) \subset (x_\nu)$, με $(\kappa_\nu), (\lambda_\nu)$ γνησίως αύξουσες

και ούτως ώστε: $\forall \mu \in \mathbb{N}\ \exists\ \nu \in \mathbb{N}$: ή $\mu = \kappa_\nu$ ή $\mu = \lambda_\nu$,

και $(x_{\kappa_\nu}) \subset D(f) \cap (-\infty, \xi)$, $(x_{\lambda_\nu}) \subset D(f) \cap (\xi, \infty)$ με $x_{\kappa_\nu}, x_{\lambda_\nu} \to \xi$

$\Rightarrow f(x_{\kappa_\nu}), f(x_{\lambda_\nu}) \to \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : |f(x_{\kappa_\nu}) - \ell|, |f(x_{\lambda_\nu}) - \ell| < \varepsilon$

[όταν $\ell \in \mathbb{R}$ ή $f(x_{\kappa_\nu}), f(x_{\lambda_\nu}) > \frac{1}{\varepsilon}$ όταν $\ell = \infty$ ή $f(x_{\kappa_\nu}), f(x_{\lambda_\nu}) < -\frac{1}{\varepsilon}$ όταν $\ell = -\infty$]

Αλλά $\forall \mu > \max\{\kappa_{\nu_0}, \lambda_{\nu_0}\}$: ή $\mu = \kappa_\nu > \kappa_{\nu_0}$ ή $\mu = \lambda_\nu > \lambda_{\nu_0}$

$\Rightarrow \nu > \nu_0 \Rightarrow |f(x_\mu) - \ell| < \varepsilon$ [όταν $\ell \in \mathbb{R}$ ή $f(x_\mu) > \frac{1}{\varepsilon}$ όταν $\ell = \infty$ ή $f(x_\mu) < -\frac{1}{\varepsilon}$ όταν $\ell = -\infty$],

δηλ. $f(x_\mu) \to \ell$ ∎]

**Θεώρημα [3.41]** (Μοναδικότητα του ορίου κατά Heine)

Έστω $f: D(f) \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \tilde{\mathbb{R}}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Τότε, αν η $f$ έχει όριο το $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$ στο σημείο $\xi$, το όριο αυτό είναι μοναδικό. Το ίδιο ισχύει και για τα πλευρικά όρια (όπου αυτά υπάρχουν).

**Απόδειξη:**

Έστω $\forall (x_\nu) \subset D(f) \setminus \{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$ : $f(x_\nu) \to \ell \in \tilde{\mathbb{R}}$
και ———— " ———— : $f(x_\nu) \to m \in \tilde{\mathbb{R}}$
Αλλά τότε $\ell = m$. Για $\ell, m \in \mathbb{R}$ αυτό προκύπτει από την μοναδικότητα του ορίου συγκλίνουσας ακολουθίας (βλ. Θ. [1.35])
Το $\ell \in \mathbb{R}$, $m \in \{\pm\infty\}$ είναι άτοπο, αφού η $(f(x_\nu))$ θα πρέπει να είναι και να μην είναι φραγμένη ταυτόχρονα.
Σε άτοπο οδηγεί και η υπόθεση $f(x_\nu) \to \infty$ και $f(x_\nu) \to -\infty$, αφού τότε $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \forall \nu > \nu_0$: $f(x_\nu) > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ και $f(x_\nu) < -\frac{1}{\varepsilon} < 0$.

$\square$

<u>Άσκηση</u> [3.5γ)] Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω όρια δεν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$:

$\boxed{6.2/8}$

α) $\lim\limits_{x \to \sqrt[k]{\alpha}+} \dfrac{1}{x^k - \alpha}$ $(\alpha \geq 0,\ k \in \mathbb{N})$ β) $\lim\limits_{x \to 1} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$

<u>Λύση</u>: α) $f(x) = \dfrac{1}{x^k - \alpha}$ $(\alpha \geq 0,\ k \in \mathbb{N})$, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^k - \alpha \neq 0\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[k]{\alpha}\} = (-\infty, \sqrt[k]{\alpha}) \cup (\sqrt[k]{\alpha}, \infty) \Rightarrow$ Το $\sqrt[k]{\alpha}$ είναι σ.σ.

του $D(f)$ (και από δεξιά και από αριστερά).

Έστω $(x_\nu) \subset (\sqrt[k]{\alpha}, \infty)$ με $x_\nu \to \sqrt[k]{\alpha} \iff x_\nu - \sqrt[k]{\alpha} \to 0$

$\underset{x_\nu - \sqrt[k]{\alpha} > 0}{\Longrightarrow} f(x_\nu) = \dfrac{1}{x_\nu - \sqrt[k]{\alpha}} \to \infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \to \sqrt[k]{\alpha}+} \dfrac{1}{x^k - \alpha} = \infty \in \tilde{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ (1)

[ Να προσεχθεί ότι ανάλογα ισχύει για $(x_\nu) \subset (-\infty, \sqrt[k]{\alpha})$ με

$x_\nu \to \sqrt[k]{\alpha}$ : $f(x_\nu) \to -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \sqrt[k]{\alpha}-} \dfrac{1}{x^k - \alpha} = -\infty \in \tilde{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ (2)

και άρα από τις (1) και (2) $\nexists \lim\limits_{x \to \sqrt[k]{\alpha}} \dfrac{1}{x^k - \alpha}$ (ούτε στο $\tilde{\mathbb{R}}$). ]

β) $f(x) = \sin \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ \sqrt{x} \neq 1\}$

$= \{x \geq 0 : x \neq 1\} = [0,1) \cup (1,\infty) \Rightarrow 1$ είναι σ.σ. του $D(f)$

Αφού για $(x_\nu) \subset D(f)$ με $\dfrac{1}{\sqrt{x_\nu}-1} = 2\pi\nu \Leftrightarrow \sqrt{x_\nu} = \dfrac{1}{2\pi\nu} + 1$

$\Leftrightarrow x_\nu = \left(\dfrac{1}{2\pi\nu} + 1\right)^2$ έχουμε $x_\nu \to 1$ και $f(x_\nu) = 0\ \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_\nu) \to 0$ και για $(y_\nu) \subset D(f)$ με $\dfrac{1}{\sqrt{y_\nu}-1} = 2\pi\nu + \dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y_\nu} = \dfrac{1}{2\pi\nu + \frac{\pi}{2}} + 1 \Leftrightarrow y_\nu = \left(\dfrac{1}{2\pi\nu + \frac{\pi}{2}} + 1\right)^2$ έχουμε $y_\nu \to 1$

και $f(y_\nu) = 1\ \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow f(y_\nu) \to 1$ συνεπάγεται ότι

το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ δεν υπάρχει (ούτε στο $\tilde{\mathbb{R}}$).

# [§3.3] $\varepsilon-\delta$ – ορισμός σύγκλισης κατά Cauchy

**Ορισμός** [3.14]: Έστω $f: D(f) \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$.

Η $f$ έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ (ή συγκλίνει στο $\ell$) στο σημείο $\xi$,

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell \quad \text{ή} \quad f(x) \to \ell \text{ για } x \to \xi \quad \text{ή} \quad f(x) \xrightarrow[x\to\xi]{} \ell$$

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in D(f)\setminus\{\xi\} \text{ με } |x-\xi| < \delta : |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

**Παρατηρήσεις** [3.15 – 3.20]: α) Δεν αλλάζουμε την σειρά των ποσοδεικτών, γιατί θα αλλάξει το νόημα της πρότασης.

β) Για δεδομένο $f$, το $\delta$ εξαρτάται από το $\varepsilon$ και το $\xi$.

γ) $\boxed{\text{Το } f \text{ δεν είναι απαραίτητο να ορίζεται στο } \xi \text{, και όταν ορίζεται, το } f(\xi) \text{ δεν είναι απαραίτητα ίσο με το } \ell.}$

δ) $\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D(f) \cap N_\delta^*(\xi) : f(x) \in N_\varepsilon(\ell)$

ε) Σε αντίθεση με τον ακολουθιακό ορισμό, στον ε-δ-ορισμό το όριο πρέπει να είναι εκ προοιμίου γνωστό. Αν δεν το γνωρίζουμε μπορούμε ενδεχομένως να το βρούμε μέσω του ακολουθιακού ορισμού για μια συγκεκριμένη ακολουθία $x_\nu \to \xi$ ως $f(x_\nu) \to \ell$ και μετά να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell$.

στ) Ο ε-δ-ορισμός αντικατοπτρίζει την διαισθητική εικόνα του ορίου: Όσο πιο κοντά βρισκόμαστε στο σημείο συσσώρευσης $\xi$, τόσο πιο κοντά βρίσκονται οι τιμές της $f$ στο όριο $\ell$.

Άσκηση [3.12 β), ε)] Δείξτε (με τον ε–δ–ορισμό):

α) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+3}=2$ β) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$ γ) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{c^2}$, $c\neq 0$

Λύση:

α) $f(x)=\sqrt{x+3} \Rightarrow D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x+3\geq 0\}=[-3,\infty)$

$\Rightarrow$ Το $\xi=1$ είναι σ.σ. του $D(f)$ (αφού $\forall\, \delta>0: D(f)\cap N_\delta^*(1)\neq\emptyset$)

Αφού $\left|\sqrt{x+3}-2\right|=\left|\dfrac{x+3-4}{\sqrt{x+3}+2}\right|\leq\dfrac{|x-1|}{2}\quad\forall x\in D(f)$,

$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta:=2\varepsilon>0\ \forall x\in D(f)\cap N_\delta^*(1):\ \left|\sqrt{x+3}-2\right|\leq\dfrac{|x-1|}{2}<\dfrac{\delta}{2}=\varepsilon$

β) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{1}{x+3}\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-3\}\Rightarrow$ Το $\xi=3$

είναι σ.σ. του $D(f)$. Αφού $\left|\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{6}\right|=\left|\dfrac{6-x-3}{(x+3)6}\right|\leq\dfrac{|x-3|}{18}$

$\forall x\geq 0$, $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta:=\min\{18\varepsilon, 3\}>0\ \forall x\in D(f)\cap N_\delta^*(3)$

$\left|\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{6}\right|\leq\dfrac{|x-3|}{18}<\dfrac{\delta}{18}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{6} & \text{για } \varepsilon\geq\frac{1}{6}\\ \varepsilon & \text{για } \varepsilon\in(0,\frac{1}{6})\end{Bmatrix}\leq\varepsilon$.

γ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow$ Το $\xi=c\neq 0$ είναι σ.σ. του $D(f)$

Αφού $\left|\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{c^2}\right| = \dfrac{|c^2-x^2|}{x^2c^2} = \dfrac{|c-x||c+x|}{x^2c^2} \leq \dfrac{|c-x|(|c|+|x|)}{x^2c^2} \leq \dfrac{|c-x|\,\frac{5|c|}{2}}{\frac{|c|^4}{4}}$

$= |c-x|\,\dfrac{10}{|c|^3}$ για $|x-c|\leq \dfrac{|c|}{2}$,

$\left(\Rightarrow |x|=|x-c|+|c|\leq \dfrac{3|c|}{2}\,,\ |c|\leq|c-x|+|x|\leq\dfrac{|c|}{2}+|x| \Rightarrow |x|\geq\dfrac{|c|}{2}\right)$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta:=\min\left\{\dfrac{|c|^3}{10}\varepsilon,\ \dfrac{|c|}{2}\right\}\ \forall x\in D(f)\cap N^*_\delta(c)$

$$\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{c^2}\right| \leq |c-x|\frac{10}{|c|^3} < \delta\frac{10}{|c|^3} = \left\{\begin{array}{ll}\frac{5}{|c|^2} & \text{για } \varepsilon\geq\frac{5}{|c|^2}\\ \varepsilon & \text{για } \varepsilon\in\left(0,\frac{5}{|c|^2}\right)\end{array}\right\}\leq\varepsilon.$$

(6.2/14

**Ορισμός [3.24]** Έστω $f: D(f) \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ από αριστερά (δεξιά). Ο αριθμός $\ell \in \mathbb{R}$ είναι όριο της $f$ στο $\xi$ από αριστερά (δεξιά), $\lim_{x \to \xi-} f(x) = \ell$ $\left( \lim_{x \to \xi+} f(x) = \ell \right)$,

$$:\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D(f) \cap (\xi - \delta, \xi) : |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\left( \text{— " —} \quad \forall x \in D(f) \cap (\xi, \xi + \delta) : \quad \text{— " —} \right)$$

**Άσκηση [3.18]**: Έστω $f: D(f) \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ από αριστερά και από δεξιά. Τότε

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \to \xi-} f(x) = \ell = \lim_{x \to \xi+} f(x)$$

**Παρατήρηση**: Η πρόταση αυτή έχει αποδειχθεί για τον ακολουθιακό ορισμό του ορίου (βλ. Θ. [3.13]) (εκεί και για $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$, βλ. και πιο κάτω). Μπορεί να αποδειχθεί και ανεξάρτητα για τον ε-δ-ορισμό του ορίου. Σύμφωνα με την ισοδ. των δύο ορισμών (βλ. πιο κάτω) μια από τις δύο αποδείξεις αρκεί.

Απόδειξη: $\Rightarrow$: $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in D(f)\cap N_\delta^*(\xi): |f(x)-\ell|<\varepsilon$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D(f)\cap(\xi-\delta,\xi): |f(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to\xi-} f(x)=\ell \\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D(f)\cap(\xi,\xi+\delta): |f(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to\xi+} f(x)=\ell \end{cases}$$

$\Leftarrow$: $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \ell\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0\ \forall x\in D(f)\cap(\xi-\delta_1,\xi): |f(x)-\ell|<\varepsilon$

και $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \ell\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0\ \forall x\in D(f)\cap(\xi,\xi+\delta_2): |f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\Rightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0\ \forall x\in D(f)\cap N_\delta^*(\xi): |f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\square$

<u>Ορισμός</u> [3.30–3.32]: Έστω $f : D(f) \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \tilde{\mathbb{R}}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$.

α) $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \infty \;:\Longleftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0 \;\forall x \in D(f) \cap N_\delta^*(\xi) : f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = -\infty \;:\Longleftrightarrow\; \text{———}\;\; '' \;\;\text{———} : f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$$

β) $\xi = \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \;:\Longleftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists r > 0 \;\forall x \in D(f) \cap (r, \infty) : |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \;:\Longleftrightarrow\; \text{———}\;\; '' \;\;\text{———} : f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \;:\Longleftrightarrow\; \text{———}\;\; '' \;\;\text{———} : f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$$

γ) $\xi = -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \;:\Longleftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists r > 0 \;\forall x \in D(f) \cap (-\infty, -r) : |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \;:\Longleftrightarrow\; \text{———}\;\; '' \;\;\text{———} : f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \;:\Longleftrightarrow\; \text{———}\;\; '' \;\;\text{———} : f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$$

**Παρατήρηση:** Στην περίπτωση α) τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to\xi^-} f(x) = \pm\infty$ και $\lim_{x\to\xi^+} f(x) = \pm\infty$ ορίζονται όπως στο α) αντικαθιστώντας το $N_\delta^*(\xi)$ με το $(\xi-\delta,\xi)$ και $(\xi,\xi+\delta)$ αντίστοιχα. Κατ' αναλογία, όπως και για $l\in\mathbb{R}$, ισχύει:

**Πρόταση:** Έστω $f: D(f)\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\mathbb{R}$ σ.σ. του $D(f)\subseteq\mathbb{R}$ από αριστερά και από δεξιά. Τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \pm\infty \iff \lim_{x\to\xi^-} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to\xi^+} f(x)$

**Απόδειξη:** $\Rightarrow$:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \pm\infty \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D(f)\cap N_\delta^*(\xi):\ \pm f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{— " —}\ \forall x\in D(f)\cap(\xi-\delta,\xi):\ \pm f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \iff \lim_{x\to\xi^-} f(x) = \pm\infty \\ \text{— " —}\ \forall x\in D(f)\cap(\xi,\xi+\delta):\ \pm f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \iff \lim_{x\to\xi^+} f(x) = \pm\infty \end{cases}$$

$\Leftarrow$: $$\begin{cases} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0\ \forall x\in D(f)\cap(\xi-\delta_1,\xi):\ \pm f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \\ \text{— " —}\ \exists\delta_2>0\ \forall x\in D(f)\cap(\xi,\xi+\delta_2):\ \pm f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta := \min\{\delta_1,\delta_2\}>0\ \forall x\in D(f)\cap N_\delta^*(\xi):\ \pm f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.\ \square$$

**Θεώρημα [3.29]** (Ισοδυναμία ακολουθιακού και $\varepsilon$-$\delta$-ορισμού για $\xi, \ell \in \mathbb{R}$)

Έστω $f: D(f) \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

α) $\forall (x_\nu) \subset D(f) \setminus \{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$ : $f(x_\nu) \to \ell$

β) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \underbrace{x \in D(f) \setminus \{\xi\} \text{ με } |x-\xi| < \delta}_{\Leftrightarrow\, x \in D(f) \cap N_\delta^*(\xi)} : \underbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}_{\Leftrightarrow\, f(x) \in N_\varepsilon(\ell)}$

**Απόδειξη:**

β) $\Rightarrow$ α): Έστω $(x_\nu) \subset D(f) \setminus \{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists \delta > 0$ $\forall x \in D(f) \cap N_\delta^*(\xi)$ : $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Απ' την άλλη, αφού $x_\nu \to \xi$, $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}$ $\forall \nu > \nu_0$ : $|x_\nu - \xi| < \delta$, δηλ. (αφού $(x_\nu) \subset D(f) \setminus \{\xi\}$) $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}$ $\forall \nu > \nu_0$ : $x_\nu \in D(f) \cap N_\delta^*(\xi)$. Αλλά τότε $|f(x_\nu) - \ell| < \varepsilon$.

Άρα $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 : |f(x_\nu) - \ell| < \varepsilon$, δηλ. $f(x_\nu) \to \ell$.

6.2.19

$\alpha) \Rightarrow \beta)$: Δείχνουμε ισοδύναμα: $\neg\beta) \Rightarrow \neg\alpha)$.

Έστω ότι δεν ισχύει η β), "δεν ισχύει η β)" (εναλλ. συμβ.: $\sim\beta)$)

δηλ. $\exists\, \varepsilon>0\ \forall\, \delta>0\ \exists\, x \in D(f) \cap N_\delta^*(\xi) : |f(x)-\ell| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall\, \nu \in \mathbb{N}\ \exists\, x_\nu \in D(f) \cap N_{\frac{1}{\nu}}^*(\xi) : |f(x_\nu)-\ell| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \exists\, (x_\nu) \subset D(f) \setminus \{\xi\}$ με $|x_\nu - \xi| < \frac{1}{\nu}$ : $|f(x_\nu)-\ell| \geq \varepsilon$,

δηλ., αφού $|x_\nu - \xi| < \frac{1}{\nu} \to 0 \Rightarrow |x_\nu - \xi| \to 0 \Leftrightarrow x_\nu - \xi \to 0 \Leftrightarrow x_\nu \to \xi$,

$\exists\, (x_\nu) \subset D(f) \setminus \{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$ : $\underbrace{|f(x_\nu)-\ell| \geq \varepsilon > 0}_{\overset{(*)}{\Rightarrow}\ f(x_\nu) \not\to \ell}$, δηλ. $\neg\alpha)$.

[(*) βλ. προηγ. σημ. (Επανάληψη: $\gamma_\nu \geq \gamma > 0\ \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \gamma_\nu \not\to 0$:
Έστω $\gamma_\nu \to 0$. Τότε για $\varepsilon := \gamma > 0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \gamma_\nu < \gamma$ ↯)] $\square$

**Παρατήρηση:** Αντικαθιστώντας στο α) το $D(f)\setminus\{\xi\}$ με το $D(f)\cap(-\infty,\xi)$ (αντ., $D(f)\cap(\xi,\infty)$) και στο β) το $N_\delta^*(\xi)$ με το $(\xi-\delta,\xi)$ (αντ. $(\xi,\xi+\delta)$) έχουμε την ισοδ. των ορισμών κατά Heine και Cauchy για πλευρικά όρια. Επίσης αποδεικνύεται η ισοδ. για $\xi\pm\infty$, βλ. την επόμενη πρόταση. Αντικαθιστώντας σε όλες αυτές τις περιπτώσεις το $N_\varepsilon(\ell)$ με το $(\frac{1}{\varepsilon},\infty)$ και $(-\infty,-\frac{1}{\varepsilon})$ έχουμε την ισοδυναμία των δύο ορισμών για $\ell=\pm\infty$.

**Πρόταση:** Έστω $f: D(f)\to\mathbb{R}$, $\xi=\pm\infty$ σ.σ. του $D(f)\subseteq\mathbb{R}$ και $\ell\in\mathbb{R}$. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

α) $\forall\,(x_\nu)\subset D(f)$ με $x_\nu\to\pm\infty$ : $f(x_\nu)\to\ell\in\mathbb{R}$

β) $\forall\varepsilon>0\ \exists r>0\ \forall x\in D(f)\cap\begin{cases}(r,\infty)\\(-\infty,-r)\end{cases}$ : $f(x)\in N_\varepsilon(\ell)$

<u>Απόδειξη</u>:

β) ⇒ α): Έστω $(x_\nu) \subset D(f)$ με $x_\nu \to \pm\infty$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists\, r > 0$ $\forall x \in D(f) \cap \begin{cases}(r,\infty)\\(-\infty,-r)\end{cases} : |f(x) - \ell| < \varepsilon$. Απ' την άλλη, αφού $x_\nu \to \pm\infty$ $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : \pm x_\nu > r$, δηλ. (αφού $(x_\nu) \subset D(f)$) $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : x_\nu \in D(f) \cap \begin{cases}(r,\infty)\\(-\infty,-r)\end{cases}$. Αλλά τότε $|f(x_\nu) - \ell| < \varepsilon$.

Άρα $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu > \nu_0 : |f(x_\nu) - \ell| < \varepsilon$, δηλ. $f(x_\nu) \to \ell$.

α) ⇒ β): Δείχνουμε ισοδύναμα: $\neg$ β) ⇒ $\neg$ α). Έστω ότι δεν ισχύει η β), δηλ. $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall r > 0\ \exists\, x \in D(f) \cap \begin{cases}(r,\infty)\\(-\infty,-r)\end{cases} : |f(x) - \ell| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N}\ \exists\, x_\nu \in D(f) \cap \begin{cases}(\nu,\infty)\\(-\infty,-\nu)\end{cases} : |f(x_\nu) - \ell| \geq \varepsilon \Rightarrow \exists\, (x_\nu) \subset D(f)$ με $\pm x_\nu > \nu$: $|f(x_\nu) - \ell| \geq \varepsilon$, δηλ., αφού $\pm x_\nu > \nu \to \infty \Rightarrow x_\nu \to \pm\infty$,

$\exists\, (x_\nu) \subset D(f)$ με $x_\nu \to \pm\infty : |f(x_\nu) - \ell| \geq \varepsilon \Rightarrow f(x_\nu) \not\to \ell$, δηλ. $\neg$ α) $\square$

# [§3.4] φραγμένες συναρτήσεις

**Ορισμός [3.35]**: Μια συνάρτηση $f: D(f) \to \mathbb{R}$ με $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται

α) άνω φραγμένη στο $A \subseteq D(f)$ $:\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}: f(x) \leq M \ \forall x \in A$

β) κάτω ——— " ——— $:\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}: M \leq f(x) \ \forall x \in A$

γ) φραγμένη ——— " ——— $:\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}: |f(x)| \leq M \ \forall x \in A$

**Συμβολισμός:**

$f$ άνω φραγμένη στο $\emptyset \neq A \subseteq D(f)$ : $\sup_A f := \sup\{f(x) : x \in A\}$

$f$ στο $D(f)$ : $\sup f := \sup_{D(f)} f$

$f$ κάτω φραγμένη στο $\emptyset \neq A \subseteq D(f)$ : $\inf_A f := \inf\{f(x) : x \in A\}$

$f$ ——— " ——— στο $D(f)$ : $\inf f := \inf_{D(f)} f$

(Αν $\sup_A f, \inf_A f \in \{f(x) : x \in A\}$ γράφουμε $\max_A f$, $\min_A f$
και αν επιπλέον $A = D(f)$ γράφουμε $\max f$, $\min f$)

6.2/23

$f$ δεν είναι άνω φραγμένη στο $\emptyset \neq A \subseteq D(f)$ : $\sup_A f = \infty$

$f$ ——— " ——— στο $D(f)$ : $\sup f = \infty$

$f$ — " — κάτω — " — στο $\emptyset \neq A \subseteq D(f)$ : $\inf_A f = -\infty$

$f$ ——— " ——— στο $D(f)$ : $\inf f = -\infty$

<u>Πρόταση</u> [3.37] Έστω $f, g : D \to \mathbb{R}$ δύο φραγμένες συναρτήσεις, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Τότε:

i) $\lambda \sup f = \begin{cases} \sup(\lambda f) & \text{για } \lambda \geq 0 \\ \inf(\lambda f) & \text{για } \lambda \leq 0 \end{cases}$

ii) $\lambda \inf f = \begin{cases} \inf(\lambda f) & \text{για } \lambda \geq 0 \\ \sup(\lambda f) & \text{για } \lambda \leq 0 \end{cases}$

iii) $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$

iv) $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$

όπου $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$, $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ $\forall x \in A$.

6.2/24

<u>Απόδειξη</u>: Τα i), ii) ακολουθούν αμέσως από το Θ. [1.13] με $A = \{ f(x) : x \in D \}$.

iii) $\sup \{ f(x) + g(x) : x \in D \} \leq \sup \{ f(x) : x \in D \} + \sup \{ g(x) : x \in D \}$:

$\forall x \in D$: $f(x) \leq \sup f$, $g(x) \leq \sup g \Rightarrow f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g$, δηλ. το $\sup f + \sup g$ είναι άνω φράγμα του $\{ f(x) + g(x) : x \in D \}$

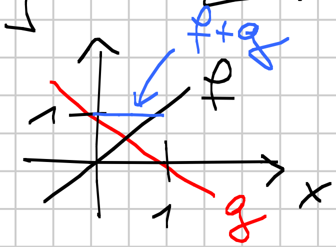
$\Rightarrow \sup (f+g) \leq \sup f + \sup g$

iv) Ανάλογα, $\forall x \in D$: $f(x) \geq \inf f$, $g(x) \geq \inf g \Rightarrow f(x) + g(x) \geq$
$\geq \inf f + \inf g$, δηλ. το $\inf f + \inf g$ είναι κάτω φράγμα του $\{ f(x) + g(x) : x \in D \} \Rightarrow \inf (f+g) \geq \inf f + \inf g$.

[Εναλλακτικά: Από την ii): $\inf f = -\sup(-f)$ [όπου $(-f)(x) = -f(x)$] και από την iii) $-\sup((-f)+(-g)) \geq -\sup(-f) - \sup(-g)$, δηλ. [αφού $((-f)+(-g))(x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x)$] $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$] $\square$

16.2/25

**Παρατήρηση [3.38]:** $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$, $D = [0, 1]$




$$\Rightarrow \quad \sup(f+g) = 1 < 1 + 1 = \sup f + \sup g$$

**Θεώρημα [3.39]:** Έστω $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $\xi \in \tilde{\mathbb{R}}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, και $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Τότε

α) η $f$ είναι φραγμένη σε κάποια δακτυλική περιοχή του $\xi$

β) $\ell \neq 0 \Rightarrow$ υπάρχει δακτυλική περιοχή του $\xi$, $N_\delta^*(\xi)$, $\delta > 0$, στην οποία $\inf\{|f(x)| : x \in D(f) \cap N_\delta^*(\xi)\} > 0$

($\Leftrightarrow$: η $f$ είναι στο $N_\delta^*(\xi)$ φραγμένη μακριά απ' το μηδέν)

**Απόδειξη:** α) $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D(f) \cap N_\delta^*(\xi) : \ f(x) \in N_\varepsilon(\ell)$$

$\Rightarrow$ Για $\varepsilon := 1$ $\exists \delta_1 > 0$ $\forall x \in D(f) \cap N_{\delta_1}^*(\xi)$: $f(x) \in N_1(\ell) \iff$

$\iff |f(x)-\ell|<1 \implies \big||f(x)|-|\ell|\big|<1 \implies |f(x)|<1+|\ell|$, δηλ.:

$|f(x)|<1+|\ell| \quad \forall x\in D(f)\cap N^*_{\delta_1}(\xi)$.

[Αν $\xi\in D(f)$ ισχύει και $|f(x)|\leq \max\{1+|\ell|, |f(\xi)|\}$
$\forall x\in D(f)\cap N_{\delta_1}(\xi)$. ]

$\xi=\pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \iff \forall\varepsilon>0\ \exists r>0\ \forall x\in D(f)\cap\begin{cases}(r,\infty)\\(-\infty,-r)\end{cases}: f(x)\in N_\varepsilon(\ell)$

$\implies \exists r_1>0\ \forall x\in D(f)\cap\begin{cases}(r_1,\infty)\\(-\infty,-r_1)\end{cases}: \big||f(x)|-|\ell|\big|<|f(x)-\ell|<1$

$\implies |f(x)|\leq 1+|\ell| \quad \forall x\in D(f)\cap\begin{cases}(r_1,\infty)\\(-\infty,-r_1)\end{cases}$.

β) $\xi\in\mathbb{R}$: $\ell\neq 0 \implies |\ell|>0 \implies$ Για $\varepsilon:=\frac{|\ell|}{2}$ $\exists\delta_2>0\ \forall x\in D(f)\cap N^*_{\delta_2}(\xi)$:

$f(x)\in N_{\frac{|\ell|}{2}}(\ell) \iff |f(x)-\ell|<\frac{|\ell|}{2} \iff \ell-\frac{|\ell|}{2}<f(x)<\ell+\frac{|\ell|}{2}$

$\implies \begin{cases}\ell>0: & f(x)>\frac{\ell}{2}>0\\ \ell<0: & f(x)<\frac{\ell}{2}<0\end{cases} \quad \forall x\in D(f)\cap N^*_{\delta_2}(\xi) \implies \inf\{|f(x)|: x\in D(f)\cap N^*_{\delta_2}(\xi)\}$
$\geq\frac{|\ell|}{2}>0$

$\xi = \pm\infty$ : $\exists r_2 > 0 \ \forall x \in D(f) \cap \begin{cases} (r_2, \infty) \\ (-\infty, -r_2) \end{cases}$ : $\ell - \frac{|\ell|}{2} < f(x) < \ell + \frac{|\ell|}{2}$

$$\Longrightarrow \inf \left\{ |f(x)| : x \in D(f) \cap \begin{cases} (r_2, \infty) \\ (-\infty, -r_2) \end{cases} \right\} \geq \frac{|\ell|}{2} > 0 . \qquad \square$$

<u>Παραδείγματα</u>:

Οι συναρτήσεις $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $g(y) = \sin \frac{1}{y}$, $y \neq 0$

είναι φραγμένες : $|f(x)| = |\sin x| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad |g(y)| = |\sin \frac{1}{y}| \leq 1 \ \forall y \neq 0$

και μάλιστα $\sup f = \max f = \sup g = \max g = 1$,

αφού $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi}\right)} = \sin(2\pi) = 0$

Παρατήρηση: Η $f$ δεν είναι φραγμένη στο $A \subseteq D(f)$

$\iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists x \in A : |f(x)| > M$

$\iff \forall \nu \in \mathbb{N}\ \exists x_\nu \in A : |f(x_\nu)| > \nu$

$\iff \exists (x_\nu) \subset A : |f(x_\nu)| \to \infty$

[ $\implies \exists (x_\nu) \subset D(f) : |f(x_\nu)| \to \infty$

$\iff$ η $f$ δεν είναι φραγμένη στο $D(f)$ ]

π.χ. η $f(x) = x \sin x$ δεν είναι φραγμένη, αφού

$$f\big(\underbrace{2\pi\nu + \tfrac{\pi}{2}}_{\to \infty}\big) = 2\pi\nu + \frac{\pi}{2} > \nu \to \infty$$