[§ 3.5] Ιδιότητες συγκλινουσών συναρτήσεων

Θεώρημα [3.41] (Μοναδικότητα του ορίου κατά Cauchy)

Έστω $f: D(f) \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \tilde{\mathbb{R}}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Τότε, αν η f έχει όριο το $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$ στο σημείο ξ, το όριο αυτό είναι μοναδικό. Το ίδιο ισχύει και για τα πλευρικά όρια (όπου αυτά υπάρχουν).

Απόδειξη (με χρήση της ισοδυναμίας ακολουθιακού και ε-δ-ορισμού)

Έστω ότι η f έχει όριο το ℓ στο σημείο ξ

και —"— m —"—

Τότε θα ισχύει το β) (για $\xi, \ell, m \in \mathbb{R}$) στο Θ. [3.29] και για ℓ και για m. Άρα θα ισχύει και το α) και για ℓ και για m. Αλλά τότε $\ell = m$ από την μοναδ. του ορίου κατά Heine.

7.1/2

Χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες μορφές της β) στο Θ. [3.29] για ξ ή ℓ ή $m \in \tilde{\mathbb{R}}$ (βλ. τις παρατηρήσεις και την πρόταση μετά το Θ. [3.29] στις Σημειώσεις 6.2) αποδεικνύεται η μοναδικότητα και σε αυτές τις περιπτώσεις. Το ίδιο ισχύει και για τα πλευρικά όρια.

Φυσικά, η μοναδικότητα του ορίου υπό την έννοια του ε-δ-ορισμού της συγκλίσεως κατά Cauchy μπορεί να αποδειχθεί και ανεξάρτητα από τον ακολουθιακό ορισμό (με ανάλογη επιχειρηματολογία). Για την περίπτωση $\xi = \infty$ βλ. [Ντ., Θ. 3.41]

Θεώρημα [3.42] (Άλγεβρα ορίων)

Έστω $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $g: D(g) \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $D = D(f) \cap D(g) \subset \mathbb{R}$, και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$. Τότε:

α) $\lim_{x\to\xi} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$

β) $\lim_{x\to\xi} (f\cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$

γ) $\lim_{x\to\xi} |f(x)| = |\ell_1|$

δ) $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ για $\ell_2 \neq 0$

Παρατήρηση (*): Το θεώρημα ισχύει (με ελαφρά τροποποιημένες αποδείξεις) και για πλευρικά όρια όπως και για $\xi = \pm\infty$.

<u>Απόδειξη:</u>

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell_1 \iff \forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta_1>0\ \forall x\in D(f)\cap N^*_{\delta_1}(\xi):\ |f(x)-\ell_1|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to\xi} g(x) = \ell_2 \iff \forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta_2>0\ \forall x\in D(g)\cap N^*_{\delta_2}(\xi):\ |f(x)-\ell_2|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta_3 := \min\{\delta_1,\delta_2\}>0\ \forall x\in \big(D(f)\cap D(g)\big)\cap N^*_{\delta_3}(\xi):$$

$$|(f+g)(x)-(\ell_1+\ell_2)| \le |f(x)-\ell_1| + |f(x)-\ell_2| < 2\varepsilon,$$

$$|(fg)(x)-(\ell_1\ell_2)| \le \underbrace{|f(x)|}_{\le M \text{ για κάποιο } \delta_1>0 \text{ (βλ. Θ. [3.39])}}|g(x)-\ell_2| + |f(x)-\ell_1||\ell_2| \le (M+|\ell_2|)\varepsilon,$$

$$\big||f(x)|-|\ell_1|\big| \le |f(x)-\ell_1|<\varepsilon,$$

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{\ell_2}\right| = \left|\frac{g(x)-\ell_2}{g(x)\ell_2}\right| \le \frac{|g(x)-\ell_2|}{m|\ell_2|} < \frac{\varepsilon}{m|\ell_2|},$$

όπου $m := \inf\{|g(x)| : x\in D(g)\cap N^*_{\delta_2}(\xi)\}>0$ για κάποιο $\delta_2>0$, βλ. Θ. [3.39] β).

Από το $\lim_{x\to\xi}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{\ell_2}$ ακολουθεί το δ) σύμφωνα με το γ) $\square$

Παρατήρηση: Σε πολλές περιπτώσεις ανάλογες προτάσεις ισχύουν και για ℓ_1 ή $\ell_2 \in \{\pm\infty\}$ (π.χ. $\lim_{x\to\xi} f_1(x) = \infty$, $\lim_{x\to\xi} f_2(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \lim_{x\to\xi}(f_1+f_2)(x) = \infty$). Το αν σε αυτές τις περιπτώσεις ισχύουν αντίστοιχοι γενικοί κανόνες όπως στο Θεώρημα [3.42], θα πρέπει κάθε φορά να αποδεικνύεται. Ιδιαίτερα στις περιπτώσεις "$\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{1}{0}$" δεν υπάρχουν γενικοί κανόνες όπως δείχνουν τα επόμενα αντιπαραδείγματα (αν και μπορεί για υποπεριπτώσεις, οι οποίες συνήθως εξαρτώνται από το είδος του σ.σ. ξ, να υπάρχουν κάποιοι κανόνες, όπως π.χ.

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \infty,\ g:(0,\delta)\to(0,\infty),\ \delta>0 \Rightarrow \lim_{x\to 0+}\frac{1}{g(x)} = \infty:$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta_1\in(0,\delta)\ \forall x\in(0,\delta_1):\ g(x)<\varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{g(x)} > \frac{1}{\varepsilon}\ )$$

Αντιπαραδείγματα άλγεβρας ορίων $\pm\infty$:

Για $f(x) = x \longrightarrow \infty$ έχουμε π.χ.

$$\begin{cases} g(x) = -\sqrt{x} \to -\infty, & (f+g)(x) = x-\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \longrightarrow \infty \\ g(x) = -x \to \infty & (f+g)(x) = 0 \to 0 \\ g(x) = -x^2 \longrightarrow \infty & (f+g)(x) = x-x^2 = (1-x)x \to -\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0, & (f\cdot g)(x) = \sqrt{x} \to \infty \\ g(x) = 0, & (f\cdot g)(x) = 0 \longrightarrow 0 \\ g(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0, & (f\cdot g)(x) = -\sqrt{x} \to -\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = \pm x \longrightarrow \pm\infty, & \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \pm 1 \to \pm 1 \\ g(x) = \pm\sqrt{x} \to \pm\infty & \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \pm\sqrt{x} \to \pm\infty \end{cases}$$

$g(x) = (\pm 1)^{[x]} \frac{1}{[x]} \longrightarrow 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = (\pm 1)^{[x]} \frac{x}{[x]}$ δεν συγκλίνει για $x \to \infty$

Θεώρημα [3.43] (Ισοσυγκλίνουσες συναρτήσεις)

$f_i : D(f_i) \to \mathbb{R}$, $i=1,2,3$, $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $D = D(f_1) \cap D(f_2) \cap D(f_3) \subseteq \mathbb{R}$. Τότε

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in D \cap N_\delta^*(\xi) : \ f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x) \\ \lim\limits_{x\to\xi} f_1(x) = \lim\limits_{x\to\xi} f_3(x) = \ell \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Longrightarrow \lim_{x\to\xi} f_2(x) = \ell$$

Απόδειξη $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta_1, \delta_3 > 0 :$ $\forall x \in D(f_1) \cap N_{\delta_1}^*(\xi)$ $|f_1(x) - \ell| < \varepsilon$

$\forall x \in D(f_3) \cap N_{\delta_3}^*(\xi)$ $|f_3(x) - \ell| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta_0 := \min\{\delta, \delta_1, \delta_3\} > 0 \ \forall x \in D \cap N_{\delta_0}^*(\xi) :$

$|f_1(x) - \ell| < \varepsilon$, $|f_3(x) - \ell| < \varepsilon$, $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x)$

$\Rightarrow -\varepsilon < -|f_1(x) - \ell| \le f_1(x) - \ell \le f_2(x) - \ell \le f_3(x) - \ell \le |f_3(x) - \ell| < \varepsilon$,

δηλ. $|f_2(x) - \ell| < \varepsilon$ $\square$

Παρατήρηση: Ισχύει η Παρατ. $(*)$.

Ανάλογα, για $\ell = \pm\infty$ ισχύει

<u>Πρόταση</u>: $f_1 : D(f_1) \to \mathbb{R}$, $f_2 : D(f_2) \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $D = D(f_1) \cap D(f_2) \subseteq \mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists\, \delta > 0 \ \ \forall x \in D \cap N_\delta^*(\xi) : f_1(x) \leq f_2(x) \\ \text{ή} \ \lim\limits_{x \to \xi} f_1(x) = \infty \ \text{ ή } \ \lim\limits_{x \to \xi} f_2(x) = -\infty \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ή} \ \lim\limits_{x \to \xi} f_2(x) = \infty \\ \text{ή} \ \lim\limits_{x \to \xi} f_1(x) = -\infty \end{array} \right. \text{ αντίστοιχα.}$$

<u>Απόδειξη</u>:

για $\ell = \infty$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ \forall x \in D \cap N_\delta^*(\xi) : f_2(x) \geq f_1(x) > \frac{1}{\varepsilon}$

για $\ell = -\infty$: $f_1(x) \leq f_2(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$ $\square$

<u>Παρατήρηση</u>: Ισχύει η Παρατ. (*)

(βλ. και τις συναρτήσεις [Εφ. § 3.6/3. και Ασκ. 3.28, Νε.])

Θεώρημα [3.44] (Μηδενική επί φραγμένη συνάρτηση)

$f_1 : D(f_1) \to \mathbb{R}$, $f_2 : D(f_2) \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $D = D(f_1) \cap D(f_2) \subseteq \mathbb{R}$. Τότε

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists M, \delta > 0 \ \forall x \in D(f_1) \cap N_\delta^*(\xi) : \ |f_1(x)| \leq M \\ \lim\limits_{x \to \xi} f_2(x) = 0 \end{array} \right. \implies \lim_{x \to \xi} (f_1 f_2)(x) = 0$$

Απόδειξη: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 \ \forall x \in D(f_2) \cap N_{\delta_2}^*(\xi) : \ |f_2(x)| < \varepsilon$

$\implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0 := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0 \ \forall x \in D \cap N_{\delta_0}^*(\xi) : \ |f_1(x) f_2(x)| \leq M\varepsilon$ $\square$

Παρατήρηση: Ισχύει η Παρατ. (*).

Παράδειγμα: $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

Θεώρημα [3.46] (Όριο σύνθεσης συναρτήσεων)

$f: D(f) \to \mathbb{R}$ με $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, $g: D(g) \to \mathbb{R}$ με σ.σ. $\eta \in \mathbb{R}$ του $D(g) \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{cases} R(f) \subseteq D(g) \text{ και } \exists\, \delta > 0\ \forall x \in D(f) \cap N_\delta^*(\xi) : f(x) \neq \eta \\ \lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \eta, \quad \lim\limits_{y \to \eta} g(y) = \ell \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to \xi} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to \xi} g(f(x)) = \ell$$

Απόδειξη: Αφού $R(f) \subseteq D(g)$, ισχύει $R(f) \cap D(g) \neq \emptyset$ ($D(f), D(g) \neq \emptyset$) και $D(g \circ f) = D(f)$ με σ.σ. ξ. $\Rightarrow$ Το $\lim\limits_{x \to \xi} (g \circ f)(x)$ έχει νόημα.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists\, \delta_1 > 0\ \forall y \in D(g) \cap N_{\delta_1}^*(\eta) : g(y) \in N_\varepsilon(\ell)$ και $\exists\, \delta_2 > 0\ \forall x \in D(f) \cap N_{\delta_2}^*(\xi) : f(x) \in N_{\delta_1}(\eta)$, οπότε για $\delta_3 := \min\{\delta_2, \delta\}$ ισχύει $\forall x \in D(f) \cap N_{\delta_3}^*(\xi) : f(x) \in D(g) \cap N_{\delta_1}^*(\eta)$

Συνεπώς $\forall x \in D(g \circ f) \cap N_{\delta_3}^*(\xi) : (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in N_\varepsilon(\ell)$ $\square$

Παρατηρήσεις: α) Ο περιορισμός $f(x) \neq \eta$ σε κάποια δακτυλική περιοχή του ξ οφείλεται στο ότι το $\lim\limits_{y \to \eta} g(y) = \ell$ μας δίνει πληροφορίες μόνο για $y \in D(g) \cap N^*_{\delta_1}(\eta)$. Αν η g είναι συνεχής στο η, δηλ. αν $\ell = g(\eta)$, ο περιορισμός αυτός δεν χρειάζεται.

β) Το θεώρημα ισχύει ανάλογα και για πλευρικά όρια καθώς και για $\xi, \eta, \ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$.

Π.χ. $f(x) = x^2$, $g(y) = \sqrt{y}$, $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [0, \infty) = D(g)$

$$\lim_{x \to \infty (=\xi)} f(x) = \infty \, (=\eta), \quad \lim_{y \to \infty (=\eta)} g(y) = \infty \, (=\ell),$$

$$\lim_{x \to \infty (=\xi)} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to \infty} g(f(x)) = \lim_{x \to \infty} x = \infty \, (=\ell).$$

[§3.7] Συνθήκες για την ύπαρξη του ορίου

Η $f : D(f) \to \mathbb{R}$ λέγεται

α) αύξουσα $:\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

β) γνήσια αύξουσα $:\Longleftrightarrow$ —— " —— $f(x_1) < f(x_2)$

γ) φθίνουσα $:\Longleftrightarrow$ —— " —— $f(x_1) \geq f(x_2)$

δ) γνήσια φθίνουσα $:\Longleftrightarrow$ —— " —— $f(x_1) > f(x_2)$

ε) μονότονη $:\Longleftrightarrow$ αύξουσα ή φθίνουσα

στ) γνήσια μονότονη $:\Longleftrightarrow$ γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα

<u>Πρόταση</u>: $f : D(f) \to \mathbb{R}$ (γνήσια) αύξουσα $\Longleftrightarrow -f : D(f) \to \mathbb{R}$ (γνήσια) φθίνουσα

[<u>Απόδειξη</u>: $\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{f(x_1) \underset{(<)}{\leq} f(x_2)}$

$\Longleftrightarrow -f(x_1) \underset{(>)}{\geq} -f(x_2)$]

Θεώρημα ([3.47] - [3.49]): $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \tilde{\mathbb{R}}$, $\alpha < \beta$

α) f αύξουσα και άνω φραγμένη $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \beta-} f(x) = \sup\limits_{x \in (\alpha,\beta)} f(x) \in \mathbb{R}$

β) f αύξουσα και μη άνω φραγμένη $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \beta-} f(x) = \infty \; (= \sup\limits_{x \in (\alpha,\beta)} f(x))$

γ) f αύξουσα και κάτω φραγμένη $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \alpha+} f(x) = \inf f(x) \in \mathbb{R}$

δ) f αύξουσα και μη κάτω φραγμένη $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \alpha+} f(x) = -\infty \; (= \inf\limits_{x \in (\alpha,\beta)} f(x))$

ε) f φθίνουσα και κάτω φραγμένη $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \beta-} f(x) = \inf\limits_{x \in (\alpha,\beta)} f(x) \in \mathbb{R}$

στ) f φθίνουσα και μη κάτω φραγμένη $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \beta-} f(x) = -\infty \; (= \inf\limits_{x \in (\alpha,\beta)} f(x))$

ζ) f φθίνουσα και άνω φραγμένη $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \alpha+} f(x) = \sup\limits_{x \in (\alpha,\beta)} f(x) \in \mathbb{R}$

η) f φθίνουσα και μη άνω φραγμένη $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \alpha+} f(x) = \infty = \sup\limits_{x \in (\alpha,\beta)} f(x)$

<u>Απόδειξη</u> (για α) και β) με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
τα γ) έως η) αποδεικνύονται ανάλογα)

α) Αφού η f είναι άνω φραγμένη, $\exists\, \ell := \sup\limits_{x\in(\alpha,\beta)} f(x) = \sup\{f(x) : x\in(\alpha,\beta)\}\in\mathbb{R}$

σ. 1/14

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\, x\in(\alpha,\beta) : \ \ell-\varepsilon < f(x)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta\in(0,\beta-\alpha) : \ \ell-\varepsilon < f(\beta-\delta)$

$\underset{f \text{ αύξ.}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta\in(0,\beta-\alpha)\ \forall x\in(\beta-\delta,\beta) : \ \ell-\varepsilon < f(x)\le \ell < \ell+\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0\ \forall x\in(\alpha,\beta)\cap N^*_{\delta-}(\beta) : \ |f(x)-\ell|<\varepsilon.$

β) Αφού η f είναι δεν είναι άνω φραγμένη, $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists\, x\in(\alpha,\beta) : \ f(x)>M$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta\in(0,\beta-\alpha) : \ f(\beta-\delta) > \frac{1}{\varepsilon}$

$\underset{f \text{ αύξ.}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0\ \forall x\in(\alpha,\beta)\cap(\beta-\delta,\beta) : \ f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$ $\square$

<u>Πόρισμα</u> (Θ. [3.50]) $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$

α) f αύξουσα $\Rightarrow \forall c\in(\alpha,\beta)$: $\mathbb{R}\ni \lim\limits_{x\to c-} f(x) \le f(c) \le \lim\limits_{x\to c+} f(x)\in\mathbb{R}$ (1),

$f(\alpha)\le \lim\limits_{x\to\alpha+} f(x)\in\mathbb{R}$ (2), $f(\beta)\ge \lim\limits_{x\to\beta-} f(x)\in\mathbb{R}$ (3),

β) f φθίνουσα $\Rightarrow \forall c\in(\alpha,\beta)$: $\mathbb{R}\ni \lim\limits_{x\to c-} f(x) \ge f(c) \ge \lim\limits_{x\to c+} f(x)\in\mathbb{R}$,

$f(\alpha)\ge \lim\limits_{x\to\alpha+} f(x)\in\mathbb{R}$, $f(\beta)\le \lim\limits_{x\to\beta-} f(x)\in\mathbb{R}$

Απόδειξη (για το α)):

$\forall c \in (\alpha, \beta)$: f αύξουσα στο (α, c) και $\sup\limits_{x\in(\alpha,c)} f(x) \leq f(c)$

(αφού $\forall x \in [\alpha, c]$: $f(x) \leq f(c)$)

f αύξουσα στο (c, β) και $f(c) \leq \inf\limits_{x\in(c,\beta)} f(x)$

(αφού $\forall x \in [c, \beta]$: $f(c) \leq f(x)$)

$\underset{\theta.[3.47-3.49],\alpha),\gamma)}{\Longrightarrow}$ (1)

f αύξουσα στο (α, c) και $\inf\limits_{x\in(\alpha,c)} f(x) \geq f(\alpha)$ $\big(\forall x \in [\alpha, c) : f(x) \geq f(\alpha)\big)$

$\underset{\gamma)}{\Longrightarrow}$ (2)

f αύξουσα στο (c, β) και $\sup\limits_{x\in(c,\beta)} f(x) \leq f(\beta)$ $\big(\forall x \in (c, \beta] : f(x) \leq f(\beta)\big)$

$\underset{\alpha)}{\Longrightarrow}$ (3)

$\square$