[§3.7] Συνθήκες για την ύπαρξη του ορίου (συνέχεια)

Θεώρημα [3.51] (Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy σε σημεία $\xi \in \mathbb{R}$)
Έστω $f : D(f) \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Τότε
$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in D(f) \cap N_\delta^*(\xi) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Απόδειξη: $\Rightarrow$: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in D(f) \cap N_\delta^*(\xi)$:
$$|f(x_1) - \ell|, |f(x_2) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - \ell - (f(x_2) - \ell)|$$
$$\leq |f(x_1) - \ell| + |f(x_2) - \ell| < 2\varepsilon .$$

$\Leftarrow$: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in D(f) \cap N_\delta^*(\xi) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$
Έστω $(x_\nu) \subset D(f) \setminus \{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$. Τότε $\exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \forall \nu \geq \nu_0$:
$0 < |x_\nu - \xi| < \delta$, δηλ. $x_\nu \in N_\delta^*(\xi)$. Αλλά τότε $\forall \nu, \mu \geq \nu_0$:
$|f(x_\nu) - f(x_\mu)| < \varepsilon$! Συνεπώς η $(f(x_\nu))$ είναι ακολουθία Cauchy
και άρα συγκλίνει. Αλλά τότε (βλ. Θ. [3.3]) $\exists \ell \in \mathbb{R}$ ούτως ώστε
$\forall (x_\nu) \subset D(f) \setminus \{\xi\}$ με $x_\nu \to \xi$: $f(x_\nu) \to \ell \in \mathbb{R}$, δηλ. $\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell$. □

Παρατηρήσεις: α) Η παραπάνω πρόταση ισχύει και για πλευρικά όρια αν αντικαταστήσουμε στην ισοδυναμία το $N_\delta^*(\xi)$ με το $N_{\delta-}^*(\xi)$ ή το $N_{\delta+}^*(\xi)$. Ανάλογα ισχύει και για $\xi = \pm\infty$:

$\boxed{7.2/2}$

Θεώρημα [3.51] (Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy σε σημεία και εκδοχή $\xi = \pm\infty$)

Έστω $f: D(f) \to \mathbb{R}$ και $\xi = \infty$ $(-\infty)$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Τότε

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0 \ \forall x_1, x_2 \in D(f) \cap (r, \infty): |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0 \ \forall x_1, x_2 \in D(f) \cap (-\infty, -r): |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \right.$$

[Η απόδειξη είναι ανάλογη της προηγούμενης.]

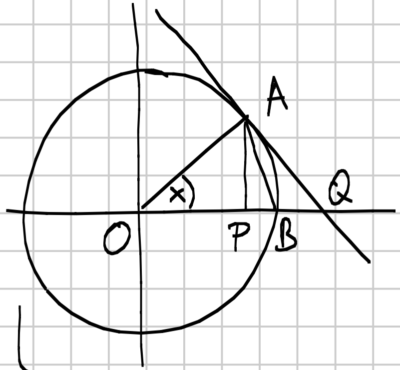
β) Το Θ. [3.51] μπορεί να χρησιμοποιηθεί αρνητικά: Για να αποδείξουμε ότι η $f: D(f) \to \mathbb{R}$ με σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ το $\xi \in \mathbb{R}$ δεν συγκλίνει σε κάποιο όριο $\ell \in \mathbb{R}$ μπορούμε να αποδείξουμε ισοδύναμα την άρνηση της συνθήκης σύγκλισης του Cauchy, δηλ. ότι $\exists\, \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists\, x_1, x_2 \in D(f)\cap N^*_\delta(\xi) : |f(x_1)-f(x_2)| \geq \varepsilon$. $\boxed{7.2/3}$

Παράδειγμα: Το $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{\pi}{x}$ δεν υπάρχει (στο $\mathbb{R}$), αφού $\forall \delta>0$ $\exists\, k\in\mathbb{N}$ $k>\frac{1}{2\delta} \iff \delta > \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k+1} > 0$, δηλ. $\exists\, x_1=\frac{1}{2k}, x_2=\frac{1}{2k+1} \in$ $\in (\mathbb{R}\setminus\{0\})\cap N^*_\delta(0) = (-\delta,0)\cup(0,\delta)$ με $\left|\cos\frac{\pi}{\frac{1}{2k}} - \cos\frac{\pi}{\frac{1}{2k+1}}\right| = |1+1| = 2 \geq 1 = \varepsilon$.

γ) Εδώ όπως και σε όλα τα προηγούμενα που αφορούν όρια ακολουθιών, σειρών και συναρτήσεων καλό είναι να χρησιμοποιούμε τον όρο σύγκλιση ή να μιλάμε για ύπαρξη ορίου όταν το όριο είναι πραγματικός αριθμός. Όταν το όριο είναι το $\pm\infty$ είναι κατά βάση καλύτερο να λέμε ότι η ακολ., σειρά ή συνάρτηση τείνει στο $\pm\infty$ ή απειρίζεται (θετικά ή αρνητικά) ή συγκλίνει κατ' εκδοχή στο $\pm\infty$

[§3.6] Μερικά αξιοσημείωτα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$:



$$\boxed{\frac{1}{2}|OB|\,|AP| < \left(\frac{|x|}{2\pi}\right)\pi\,|OA|^2 < \frac{1}{2}|OA|\,|AQ|}$$

$|OA| = 1$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$|AP| = |\sin x|$

$|OP| = |\cos x|$

$$\left.\begin{aligned} &|AP|^2 + |OP|^2 = 1 \\ &|AP|^2 + |PQ|^2 = |AQ|^2 \\ &|AQ|^2 + 1 = (|OP| + |PQ|)^2 \end{aligned}\right\} \implies$$

$\implies \cancel{|AQ|^2} + 1 = |OP|^2 + \cancel{|AQ|^2} - |AP|^2 + 2|OP|\sqrt{|AQ|^2 - |AP|^2}$

$\iff |AP|^2 = |OP|\sqrt{|AQ|^2 - |AP|^2}$

$\iff \dfrac{|AP|^2\,(|AP|^2 + |OP|^2)}{|OP|^2} = |AQ|^2$

$\iff \dfrac{|AP|^2}{|OP|^2} = |AQ|^2 \iff |AQ| = \dfrac{|AP|}{|OP|}$

$\iff |AQ| = \dfrac{|\sin x|}{|\cos x|}\left(= |\tan x|\right)$

$\iff |\sin x| < |x| < \dfrac{|\sin x|}{|\cos x|}$ για $|x|\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\iff \underbrace{\cos x}_{} < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ —— " ——

$= \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - \dfrac{x^2}{2}$

$\implies 1 - \dfrac{x^2}{2} < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ για $|x|\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\implies$ Θ.[3.43] (Ισοσυγκλ. συναρτ.) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to \beta} \alpha^x = \alpha^\beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}$:

α) Έστω $(x_\nu) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ με $x_\nu \to 0$ και $\varepsilon > 0$.

Αφού $\sqrt[\nu]{e} = e^{\frac{1}{\nu}} \to 1$, $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N} : e^{\frac{1}{\nu_0}} - 1 < \varepsilon$

και $\exists\, \nu_1 \in \mathbb{N} \ \forall\, \nu > \nu_1 : |x_\nu| < \frac{1}{\nu_0}$, δηλ. $\begin{cases} x_\nu < \frac{1}{\nu_0} & \text{για } x_\nu > 0 \\ x_\nu > -\frac{1}{\nu_0} & \text{για } x_\nu < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad |e^{x_\nu} - 1| = \begin{cases} e^{x_\nu} - 1 \underset{(1)}{<} e^{\frac{1}{\nu_0}} - 1 < \varepsilon & \text{για } x_\nu > 0 \\ 1 - e^{x_\nu} \underset{(1)}{<} 1 - e^{-\frac{1}{\nu_0}} \underset{(2)}{<} e^{\frac{1}{\nu_0}} - 1 < \varepsilon & \text{για } x_\nu < 0 \\ 1 - e^0 = 0 < \varepsilon & \text{για } x_\nu = 0 \end{cases}$$

δηλ. $|e^{x_\nu} - 1| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad e^{x_\nu} \to 1 \quad \left(\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1\right)$

(1) $e^x < e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \ x < y$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad 1 - e^x < e^{-x} - 1 \iff e^x - e^{2x} < 1 - e^x$

$$\iff e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2 > 0$$

β) Έστω $(x_\nu) \subset \mathbb{R} \setminus \{\beta\}$ $(\beta \in \mathbb{R})$ με $x_\nu \to \beta \iff x_\nu - \beta \to 0$

$$\Rightarrow \quad e^{x_\nu - \beta} = e^{x_\nu} e^{-\beta} \to 1 \iff e^{x_\nu} \to e^{\beta},$$ $\boxed{\text{Γ.2/6}}$

δηλ. $\lim\limits_{x \to \beta} e^x = e^\beta$

γ) $\alpha^x = \left(e^{\log \alpha}\right)^x = e^{x \log \alpha}$

με $\lim\limits_{x \to \beta} (x \log \alpha) = \beta \log \alpha$ (βλ. Σημ. 6Α/

και $\lim\limits_{y \to \beta \log \alpha} e^y = e^{\beta \log \alpha} = \alpha^\beta$ (βλ. β))

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to \beta} \alpha^x = \alpha^\beta$, $\alpha \neq 1$

$x \log \alpha \neq \beta \log \alpha \ \forall x \neq \beta \ (\alpha \neq 1)$

Όριο σύνθεσης συναρτήσεων

δ) $1^x = \left(e^{\log 1}\right)^x = e^{x \log 1} = e^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3. $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$:

Έστω $(x_\nu) \subset \mathbb{R}$, $x_\nu \to \pm\infty \Longrightarrow \left(1 + \frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu} \to e$.

(βλ. [Εφ. 3. / § 1.9, Nτ.], Σημ.

4. $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$\alpha = 0$: $1^x = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$: $\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\alpha}}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right)^\alpha =: f(x)^\alpha$

με $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e$ (βλ. 3.)

και $\boxed{\lim_{y \to \alpha} y^\beta = \alpha^\beta, \ \alpha > 0, \ \beta \in \mathbb{R}}$ (*)

$\Longrightarrow$ όριο σύνθεσης συναρτήσεων $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)^\alpha = e^\alpha$

(*) i) $\lim\limits_{x\to 1} \log x = 0$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ \delta := 1 - e^{-\varepsilon} \in (0,1) \ \forall x \in (1-\delta, 1+\delta)$:

$e^{-\varepsilon} < x < 2 - e^{-\varepsilon} < e^{\varepsilon}$ $[\, 2 - e^{-\varepsilon} < e^{\varepsilon} \Leftrightarrow 2e^{\varepsilon} - 1 < e^{2\varepsilon} \Leftrightarrow (e^{\varepsilon}-1)^2 > 0 \,]$

$\Leftrightarrow -\varepsilon < \log x < \varepsilon \Leftrightarrow |\log x| < \varepsilon$

ii) $\lim\limits_{x\to \alpha} \log x = \log \alpha$, $\alpha > 0$:

Έστω $(x_\nu) \subset (0,\alpha) \cup (\alpha, \infty)$, $x_\nu \to \alpha \Leftrightarrow \dfrac{x_\nu}{\alpha} \to 1$

$\Rightarrow \log \dfrac{x_\nu}{\alpha} = \log x_\nu - \log \alpha \to 0 \Leftrightarrow \log x_\nu \to \log \alpha$.

iii) $\lim\limits_{x\to \alpha} x^\beta = \alpha^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$:

$x^\beta = e^{\beta \log x} \longrightarrow e^{\beta \log \alpha} = \alpha^\beta$ (όριο σύνθεσης συναρτήσεων)

5. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$:

$\forall x\in\mathbb{R}\ \exists \nu_0\in\mathbb{N} : \nu_0 > -x$ (Αρχιμήδεια Ιδιότητα)

$\Rightarrow \forall \nu\geq \nu_0\in\mathbb{N} : \nu > -x \Leftrightarrow \nu+x>0 \Leftrightarrow 1+\frac{x}{\nu}>0$

$\Rightarrow \forall \nu\geq \nu_0\in\mathbb{N} : \left(1+\frac{x}{\nu}\right)^\nu \geq 1+x$ (Ανισότητα Bernoulli)

$\underset{(*)}{\Rightarrow} \quad e^x = \lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^\nu \geq \lim_{\nu\to\infty}(1+x) = 1+x$, δηλ. $\underset{(1)}{\boxed{e^x\geq 1+x\ \forall x\in\mathbb{R}}}$

[(*): $\alpha_\nu \geq \beta_\nu$, $\alpha_\nu\to\alpha$, $\beta_\nu\to\beta \Rightarrow \alpha\geq\beta$, δηλ. $\gamma_\nu\geq 0$, $\gamma_\nu\to\gamma \Rightarrow \gamma\geq 0$]

$\Rightarrow \quad e^{-x}\geq 1-x\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow e^x\leq \frac{1}{1-x}\ \forall x\in(-\infty,1)$ (2)

$\underset{(1),(2)}{\Rightarrow} \quad x\leq e^x-1\leq \frac{x}{1-x}\ \forall x\in(-\infty,1) \Rightarrow 1\leq \frac{e^x-1}{x}\leq \frac{1}{1-x}\ \forall x\in(0,1)$

$\Rightarrow \quad 1\leq \frac{e^x-1}{x}\leq \frac{1}{1-x}\ \forall x\in(0,1)$ και $1\geq \frac{e^x-1}{x}\geq \frac{1}{1-x}\ \forall x\in(-\infty,0)$

$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ (Όριο ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων)

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log x}{x-1} = 1$: 7.2/10

$e^x \geq 1+x \quad \forall x\in\mathbb{R} \implies e^{\log x} = x \geq 1+\log x \quad \forall x\in(0,\infty) \ (1)$

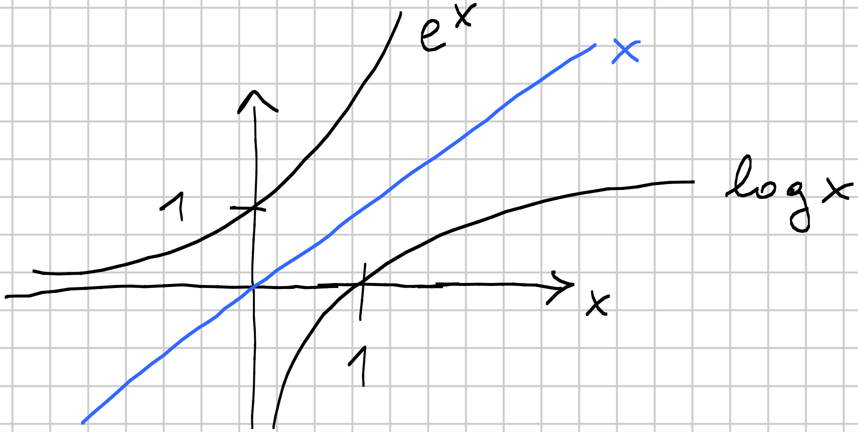
$\iff \dfrac{1}{x} \geq 1+\log\dfrac{1}{x} = 1-\log x \quad \forall x\in(0,\infty)$

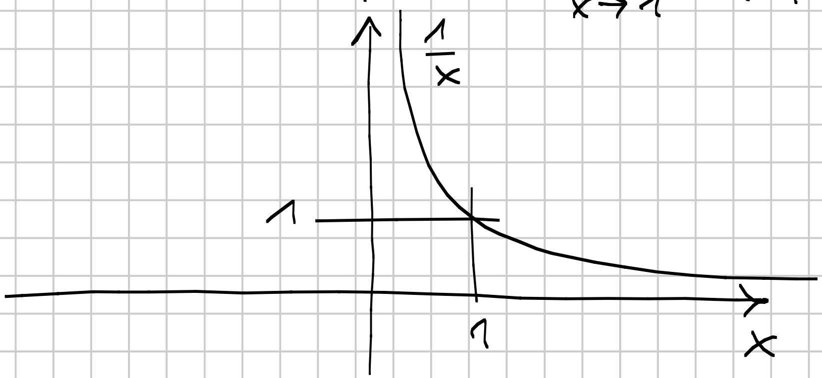
$\iff \log x \geq \dfrac{x-1}{x} \quad \forall x\in(0,\infty) \quad (2)$

$\underset{(1),(2)}{\implies} \dfrac{x-1}{x} \leq \log x \leq x-1 \quad \forall x\in(0,\infty)$

$\implies \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\log x}{x-1} \leq 1 \quad \forall x\in(1,\infty), \quad \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{\log x}{x-1} \geq 1 \quad \forall x\in(0,1)$

Άρα, από το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Συναρτήσεων: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log x}{x-1} = 1$.





[Κεφ. 4] Συνέχεια συνάρτησης

[§ 4.2] Ορισμοί και παρατηρήσεις

Ορισμός [4.1 – 4.2] Μια συνάρτηση $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται

α) συνεχής στο ξ $(\in D(f))$ (ε-δ-ορισμός)

$$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D(f) \cap N_\delta(\xi) : \ f(x) \in N_\varepsilon(f(\xi))$$

$$\left(\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D(f) \text{ με } |x - \xi| < \delta : \ |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon \right.$$

$$\left. \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \xi + h \in D(f) \text{ με } |h| < \delta : \ |f(\xi + h) - f(\xi)| < \varepsilon \right)$$

β) συνεχής (στο $D(f)$) $:\Longleftrightarrow$ η f είναι συνεχής $\forall \xi \in D(f)$

γ) συνεχής στο A $\left(\subseteq D(f)\right)$ $:\Longleftrightarrow$ η $f|_A : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής

[Η $f|A$ με $f|_A(x) = f(x)$ $\forall x \in A$ είναι ο περιορισμός της f στο $A \subseteq D(f)$]

Παρατήρηση [4.3 γ)]: Το ξ πρέπει να ανήκει στο $D(f)$, αλλά δεν πρέπει να είναι σημείο συσσώρευσης του $D(f)$, δηλ. το ξ μπορεί να είναι μεμονωμένο σημείο.

Υπενθύμιση (πβ. Σημ. 6.1/5, γ')):

$\forall \xi \in D(f)$: ή ξ σ.σ. του $D(f)$ ή ξ μεμονωμένο σημείο

Θεώρημα [4.4] Έστω $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $\xi \in D(f)$ σ.σ. του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Τότε

$$f \text{ συνεχής στο } \xi \iff \lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi) = f\left(\lim_{x \to \xi} f(x)\right)$$

Απόδειξη:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D(f) \cap N_\delta(\xi): |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

$$\iff \text{———— '' ————} \ N_\delta^*(\xi): \text{———— '' ————},$$

δηλ. f συνεχής στο ξ ($\in D(f)$ σ.σ. του $D(f)$) $\iff \lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$

Ειδικότερα, $\boxed{\text{η ταυτοτική συνάρτηση } g(x) = x \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}}$

$[\forall \xi \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta := \varepsilon > 0 \ \forall x \in N_\delta(\xi): x \in N_\varepsilon(\xi)]$

και άρα $\lim_{x \to \xi} x = \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$. □

Θεώρημα [4.5]: $f : D(f) \to \mathbb{R}$, ξ μεμονωμένο σημείο του $D(f) \subseteq \mathbb{R}$
$\Longrightarrow$ f συνεχής στο ξ.

Απόδειξη:

ξ μεμονωμένο σημείο του $D(f)$ $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \delta > 0 : D(f) \cap N_\delta(\xi) = \{\xi\}$
$\Longrightarrow \forall x \in D(f) \cap N_\delta(\xi) : x = \xi \Rightarrow f(x) = f(\xi) \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| = 0 < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0.$ $\square$

Παραδείγματα:

α) Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε ένα πεπερασμένο σύνολο $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu\}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ για $i \neq j$, είναι συνεχής. (πβ. Σημ. 6.1/6, δ΄΄))

β) Κάθε ακολουθία $(\alpha_\nu) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής (πβ. Σημ. 6.1/5, γ΄))

γ) Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0, αφού το 0 είναι σ.σ. του $D(f) = \mathbb{R}$ και $|f(x)| \leq |x|$ με $\lim\limits_{x \to 0} x = 0 \underset{\Theta.[3.42]\gamma)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

$\overset{\Theta.[3.43]}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} |f(x)| = 0 \overset{\Theta.[3.42]\beta)}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} (-|f(x)|) = 0$

$\overset{\Theta.[3.43],(-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|)}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

[Εναλλακτικά: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta := \varepsilon > 0\ \forall x \in N_\delta(0) : |f(x)| \le |x| < \varepsilon$]

δ) Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού $\forall \xi \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ (δηλ. $\forall \delta > 0\ \forall x \in N_\delta(\xi)$) :
$|f(x) - f(\xi)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

ε) Η $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, είναι συνεχής, αφού
$\forall \xi > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta := \varepsilon > 0\ \forall x \in [0,\infty) \cap N_\delta(\xi)$:
$$|\sqrt{x} - \sqrt{\xi}| = \frac{|x-\xi|}{|\sqrt{x}+\sqrt{\xi}|} \le \frac{1}{\sqrt{\xi}}\varepsilon$$
και (για $\xi = 0$) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta := \varepsilon^2 > 0\ \forall x \in [0,\delta) : \sqrt{x} < \varepsilon$

<u>Ορισμός</u> [4.13] Μια συνάρτηση $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται <u>συνεχής στο ξ</u> $(\in D(f))$ <u>από αριστερά</u> (αντίστοιχα, <u>από δεξιά</u>) $:\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D(f) \cap \underbrace{N_{\delta_-}(\xi)}_{=(\xi-\delta, \xi]} \ \left(\text{αντ.}, \forall x \in D(f) \cap \underbrace{N_{\delta_+}(\xi)}_{=[\xi, \xi+\delta)}\right) : f(x) \in N_\varepsilon(f(\xi))$$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

α) f συνεχής στο ξ από αριστερά και από δεξιά $\iff$ f συνεχής στο ξ

β) ξ μεμονωμένο σημείο του $D(f)$ από αριστερά, δηλ. $\exists \delta > 0$ $D(f) \cap N^*_{\delta_-}(\xi) = \emptyset$ (από δεξιά, δηλ. $\exists \delta > 0$ $D(f) \cap N^*_{\delta_+}(\xi) = \emptyset$) $\Rightarrow$ f συνεχής στο ξ από αριστερά (από δεξιά), πβ. Θ. [4.5].

γ) $\xi \in D(f)$ σ.σ. του $D(f)$ από αριστερά (από δεξιά): f συνεχής στο ξ από αριστερά (από δεξιά) $\iff$ $\lim_{x \to \xi^-} f(x) = f(\xi) = f\left(\lim_{x \to \xi^-} x\right)$ $\left(\lim_{x \to \xi^+} f(x) = f(\xi) = f\left(\lim_{x \to \xi^+} x\right)\right)$, πβ. Θ. [4.4].

δ) f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ $\iff$ f συνεχής $\forall \xi \in (\alpha, \beta)$, f συνεχής από δεξιά στο α, f συνεχής από αριστερά στο β.