[§5.3] Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

Σταθερή συνάρτηση: $f(x) = c \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$

Ταυτοτική συνάρτηση: $f(x) = x\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$

Γραμμική συνάρτηση: $f(x) = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x+h)-\alpha x}{h} = \alpha$

(ή με αλγ. παραγ. συναρτ.)

Εκθετική συνάρτηση: $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} \underset{[§3.6,5.]}{=} e^x$$

Εκθετική συνάρτηση με βάση $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$: $f(x) = \alpha^x,\ x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) = \left(e^{\log \alpha}\right)^x = e^{x \log \alpha} =: e^{y(x)} \underset{\text{Παραγ. συνθ. συν.}}{\Rightarrow} f'(x) = e^{y(x)}\, y'(x) = \alpha^x \log \alpha$$

Λογαριθμική συνάρτηση: $f(x) = \log(|x|)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x > 0$: $f(x) = \log x \underset{\text{Παραγ. αντιστρ. συν.}}{\Longrightarrow} f'(x) = \dfrac{1}{e^{\log x}} = \dfrac{1}{x}$

$x < 0$: $f(x) = \log(-x) =: g(-x) \underset{\text{Παραγ. συνθ. συν}}{\Longrightarrow} f'(x) = -g'(-x)$

και $g'(-x) = \dfrac{1}{-x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Συνολικά δηλ., $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$

$f(x) = x^{\alpha} := (e^{\ln x})^{\alpha} = e^{\alpha \ln x} =: g(\alpha \ln x) \Rightarrow f'(x) \underset{\substack{\text{Παραγ. συνθ. συν.} \\ \text{\& αλγ. παραγ. συν.}}}{=} g'(\alpha \ln x)\, \alpha \dfrac{1}{x}$

$= e^{\alpha \ln x} \alpha \dfrac{1}{x} = x^{\alpha} \alpha \dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

$\underset{(1)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{h}{2})\cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x$ [§3.6, 1.]

& cos συνεχής (βλ. Σημ. 8.1/7-10)

$f(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \underset{(2)}{=} \sin(\frac{\pi}{2} - x) =: g(\frac{\pi}{2} - x)$

$\Rightarrow f'(x) \underset{\text{παραγ. συνθ. συν.}}{=} g'(\frac{\pi}{2} - x)(\frac{\pi}{2} - x)' \underset{(3)}{=} \cos(\frac{\pi}{2} - x)(-1) = -\sin x$

$f(x) = \tan x \ (= \operatorname{tg} x) = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$:

$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \underset{\text{αλγ. παραγ. συν.}}{=} \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} \underset{(4)}{=} \frac{1}{\cos^2 x} \underset{(4)}{=} 1 + \tan^2 x$

$f(x) = \cot x \ (= \operatorname{ctg} x) = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$:

$\Rightarrow f'(x) \underset{\text{αλγ. παραγ. συν.}}{=} \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} \underset{(4)}{=} -\frac{1}{\sin^2 x} \underset{(4)}{=} -(1 + \cot^2 x)$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$f(x) = \text{Arcsin}\, x \,,\quad x \in [-1,1] \Rightarrow f'(x) \underset{\substack{\text{παραγ.}\\ \text{αντ. συν.}}}{=} \dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \dfrac{1}{\cos(\text{Arcsin}x)}$

$\Big($ για $x \in (-1,1) \Leftrightarrow \text{Arcsin}\, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos(\text{Arcsin}\, x) > 0\Big)$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{|\cos(\text{Arcsin}\, x)|} \underset{(4)}{=} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin}\, x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \text{Arccos}\, x \,,\quad x \in [-1,1] \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = -\dfrac{1}{\sin(\text{Arccos}x)}$

$\Big($ για $x \in (-1,1) \Leftrightarrow \text{Arccos}\, x \in (0, \pi) \Leftrightarrow \sin(\text{Arccos}\, x) > 0\Big)$

$\Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{|\sin(\text{Arccos}x)|} \underset{(4)}{=} -\dfrac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\text{Arccos}x)}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f(x) = \operatorname{Arctan} x \ (= \operatorname{Arctg} x), \ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{Arccot} x \ (= \operatorname{Arcctg} x), \ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$$

$$= -\frac{1}{1 + \cot^2(\operatorname{Arccot} x)} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Στα προηγούμενα χρησιμοποιήσαμε τις ταυτότητες (χωρίς απόδειξη)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad (4) & \end{array}}$$

$\Rightarrow$ (1): βλ. Σημ. 8.1/9, (2) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin\frac{\pi}{2}\cos(-x) + \cos\frac{\pi}{2}\sin x = \cos x$,

(3) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos\frac{\pi}{2}\cos(-x) - \sin\frac{\pi}{2}\sin(-x) = \sin x$

9A/6

Υπερβολικές συναρτήσεις:

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \underset{\substack{\text{αλγ. παραγ. συν.} \\ \text{\& παραγ. συνθ. συν.}}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \underset{\substack{\text{αλγ. παραγ. συν.} \\ \text{\& παραγ. συνθ. συν.}}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$f(x) = \tanh x \ (= \mathrm{tgh}\, x) = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(x) \underset{\text{αλγ. παραγ. συν.}}{=} \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \underset{(*)}{=} \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$f(x) = \coth x \ (= \mathrm{ctgh}\, x) = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\boxed{(*): \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$$\Rightarrow f'(x) \underset{\text{αλγ. παραγ. συν.}}{=} \frac{(\cosh x)' \sinh x - \cosh x (\sinh x)'}{\sinh^2 x} \underset{(*)}{=} -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις:

$$f(x) = \operatorname{arsinh} x \;\; (= \operatorname{Arsinh} x),\; x\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; f'(x) \underset{\text{παραγ. αντ. συν.}}{=} \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$$

$$= \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} x)} \underset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f(x) = \operatorname{arcosh} x \;(= \operatorname{Ar}_{+}\cosh x),\; x \geq 1 \;\Rightarrow\; f'(x) \underset{\text{παραγ. αντ. συν.}}{=} \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$$

$$= \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh} x)} \quad \text{για } x>1 \; (\Leftrightarrow \operatorname{arcosh} x > 0)$$

$$\Rightarrow f'(x) \underset{\operatorname{arcosh} x>0}{=} \frac{1}{|\sinh(\operatorname{arcosh} x)|} \underset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh} x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$f(x) = -\operatorname{arcosh} x \;(= \operatorname{Ar}_{-}\cosh x),\; x \geq 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\; x>1$$

$$f(x) = \operatorname{artanh} x \;(= \operatorname{Arctgh} x), \quad x \in (-1,1)$$

$$\Rightarrow f'(x) \underset{\substack{\text{παραγ.}\\ \text{αντ. συν.}}}{=} \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{artanh} x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arcoth} x \;(= \operatorname{Arcctgh} x), \quad x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$$

$$\Rightarrow f'(x) \underset{\substack{\text{παραγ.}\\ \text{αντ. συν.}}}{=} \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{1-\coth^2(\operatorname{arcoth} x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

Εφαρμογή [2., §5.3]: Έστω $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = \begin{cases} kx + x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α) Να εξεταστεί η συνέχεια της f_k

και η ύπαρξη και η συνέχεια της f_k' για κάθε $k \in \mathbb{R}$

β) Για $|k| \in (0,1)$, να δειχθεί ότι η f_k' αλλάζει πρόσημο στα

διαστήματα $(-h, 0)$ και $(0, h)$ για κάθε $h > 0$.

Λύση: α) Η f_k είναι παραγωγίσιμη (και άρα και συνεχής)

σε κάθε $x \neq 0$: x παραγ. $\Rightarrow$ $\frac{1}{x}$, kx παραγ. $\Rightarrow$ $\sin\frac{1}{x}$ παραγ.

$\Rightarrow$ $x^2 \sin\frac{1}{x}$ παραγ. $\Rightarrow$ $kx + x^2 \sin\frac{1}{x} = f(x)$ παραγ. στο $x \neq 0$

(που είναι και σ.σ. του $D(f) = \mathbb{R}$) και $f_k'(x) = k + \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)'$

$= k + 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \left(\sin\frac{1}{x}\right)' = k + 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x}\right)'$

$= k + 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = k + 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, η οποία (μέσω σύνθεσης, πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης συνεχών) είναι και συνεχής σε κάθε $x \neq 0$.

Στο $x=0$, η $f_K(x)$ είναι συνεχής, αφού η Kx είναι συνεχής (στο $\mathbb{R}$) $\forall K \in \mathbb{R}$ και $|x^2 \sin \frac{1}{x}| \leq |x^2| \to 0$ για $x \to 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ (Θ. ισοσυγκλ. συν.) (και 0 σ.σ. του $\mathbb{R}$)

Η f_K είναι και παραγωγίσιμη στο 0, αφού υπάρχει (στο $\mathbb{R}$) το όριο $f_K'(0) := \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(K + x \sin\frac{1}{x}\right) = K \in \mathbb{R}$.

Για να είναι η f_K' συνεχής στο 0, θα πρέπει να ισχύει

$\lim_{x\to 0} f_K'(x) = f_K'(0)$, δηλ. $\lim_{x\to 0}\left(K + 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = K$

δηλ. (αφού $\lim_{x\to 0} K = K$, $\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}\right) = 0$) $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} = 0$, το οποίο όμως δεν ισχύει, αφού

$x_\nu = \frac{1}{2\pi\nu} \to 0$ και $\cos\frac{1}{x_\nu} = 1$, ενώ $y_\nu = \frac{1}{2\pi\nu + \frac{\pi}{2}} \to 0$ και $\cos\frac{1}{y_\nu} = 0$.

Συνεπώς η f_k' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ αλλά δεν είναι συνεχής στο 0.

β) $\forall h>0 \; \exists \nu_0 \in \mathbb{N}$ με $\nu_0 > \frac{1}{2\pi h}$ (Αρχιμήδεια Ιδιότητα)

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N}$ με $\nu > \nu_0$: $0 < \frac{1}{2\pi\nu+\pi} < \frac{1}{2\pi\nu} < h$ $\left(\Leftrightarrow -h < -\frac{1}{2\pi\nu} < -\frac{1}{2\pi\nu+\pi} < 0\right)$

$\Rightarrow \quad f_k'\left(\pm\frac{1}{2\pi\nu+\pi}\right) = k+1 > 0$, αφού $k > -1$

$f_k'\left(\pm\frac{1}{2\pi\nu}\right) = k-1 < 0$, αφού $k < 1$