# [§ 4.6] Ομοιόμορφη συνέχεια

Notiztitel 11.01.2012

<u>Υπενθύμιση</u>: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\xi \in \mathbb{R}\ (= D(f))$

$$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ με } |x-\xi| < \delta : \ |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

| Το $\delta$ εξαρτάται εν γένει από το $\varepsilon$ και το $\xi$ |
|---|

<u>π.χ.</u>: $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, συνεχής [Εφ. 2., § 4.3]

Έστω $\xi > 0$ και $\varepsilon > 0$. Για να είναι $|x^2 - \xi^2| = |x-\xi||x+\xi| < \varepsilon$ $\forall x \in \mathbb{R}$ με $|x-\xi| < \delta$, δηλ. $\forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$, θα πρέπει

$$|x+\xi| \le \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \forall x \in (\xi-\delta, \xi+\delta) \Longleftrightarrow x+\xi \in (2\xi - \delta, 2\xi + \delta),$$

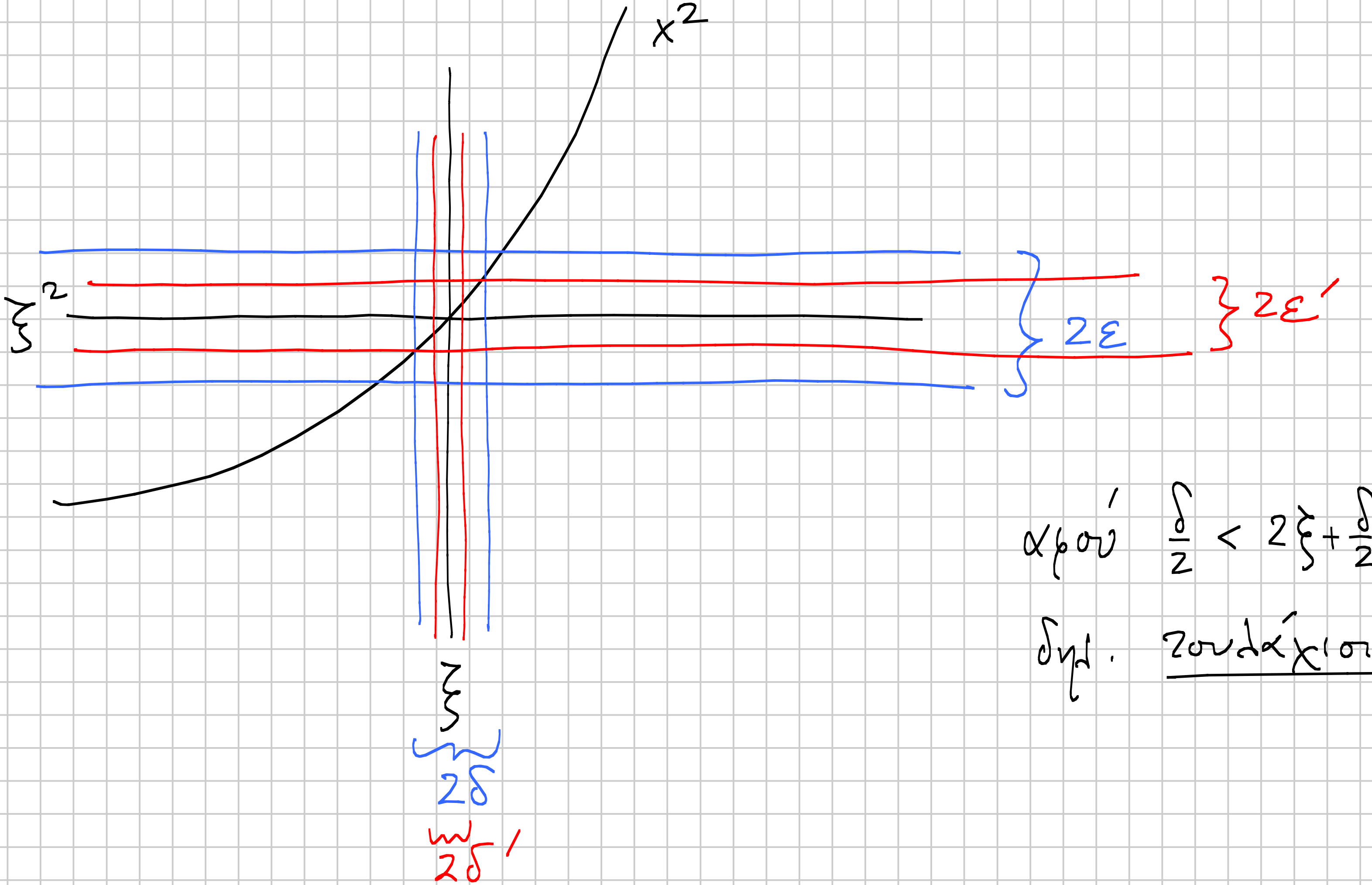
δηλ. π.χ. για $x + \xi = 2\xi + \frac{\delta}{2}$ θα πρέπει

$$2\xi + \frac{\delta}{2} < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

Αυτό σημαίνει ότι

για σταθερό $\xi$ :

όσο πιο μικρό είναι το $\varepsilon$ , τόσο πιο μικρό πρέπει να είναι το $\delta$



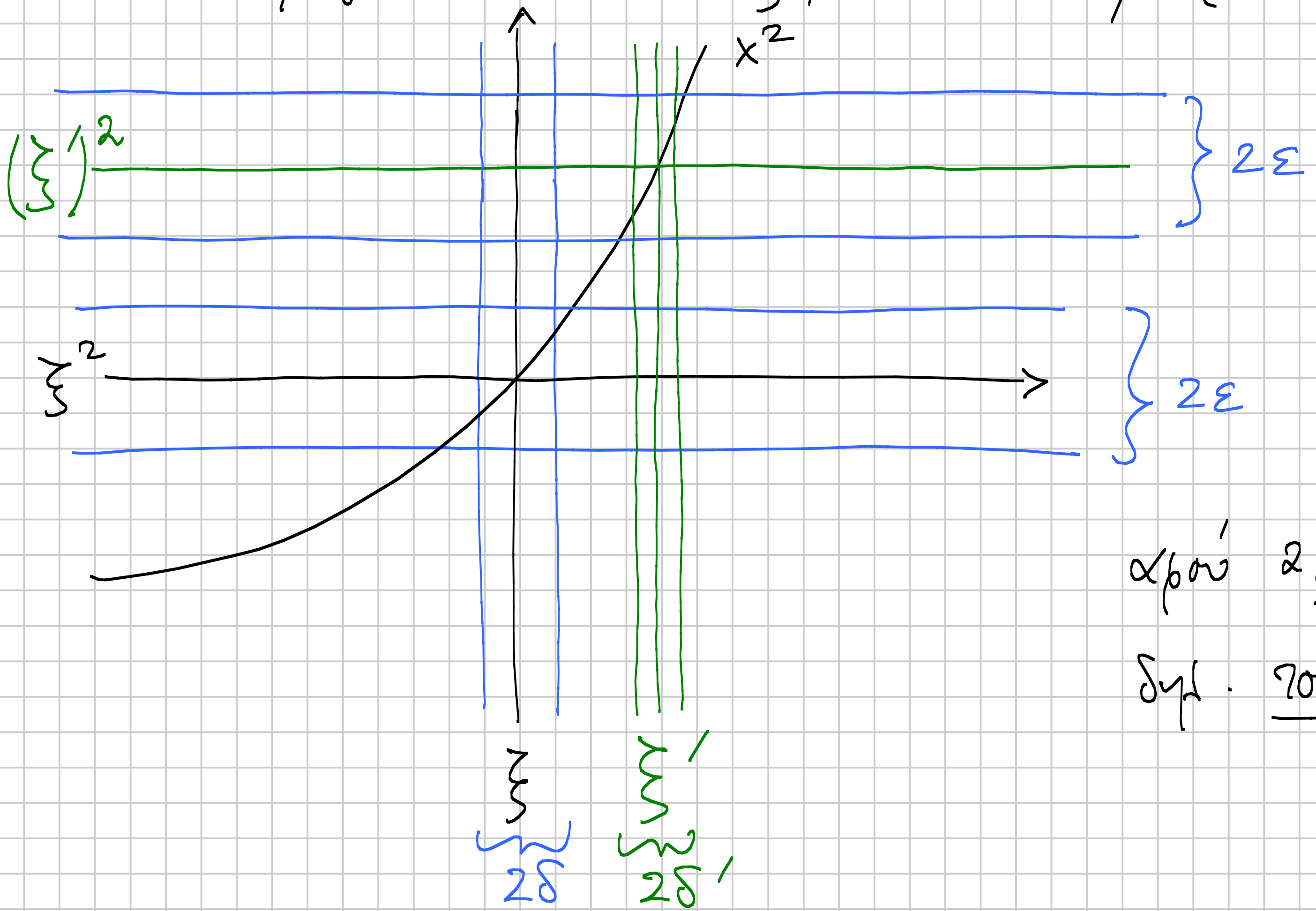

αφού $\frac{\delta}{2} < 2\xi + \frac{\delta}{2} \overset{!}{<} \frac{\varepsilon}{\delta}$ ,

δηλ. <u>τουλάχιστον</u> $\delta \overset{!}{<} \sqrt{2\varepsilon}$

19.1.13

## για σταθερό ε :

όσο πιο μεγάλο είναι το $\xi$, τόσο πιο μικρό πρέπει να είναι το $\delta$




αφού $2\xi < 2\xi + \frac{\delta}{2} \overset{!}{<} \frac{\varepsilon}{\delta}$,

δηλ. τουλάχιστον $\delta \overset{!}{<} \frac{\varepsilon}{2\xi}$

Στην πρώτη περίπτωση ($\xi$ σταθερό) παρατηρούμε ότι η απαίτηση $\delta < \sqrt{2\varepsilon}$ προκύπτει για κάθε $\xi > 0$, είναι δηλ. ανεξάρτητη του $\xi$, και είναι αναγκαία για την συνέχεια της $f(x) = x^2$ σε οποιοδήποτε $\xi > 0$.

Στην δεύτερη περίπτωση ($\varepsilon$ σταθερό) παρατηρούμε ότι η απαίτηση $\delta < \frac{\varepsilon}{2\xi}$ μπορεί να γίνει ανεξάρτητη του $\xi$, δηλ. <u>το $\delta$ να εξαρτάται μόνο από το $\varepsilon$</u>, αν θεωρούμε π.χ. μόνο θετικά $\xi \leq \alpha$, $\alpha > 0$.

Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για <u>ομοιόμορφη συνέχεια</u> <u>που αναφέρεται προφανώς σε ένα σύνολο σημείων $\xi \in D(f)$.</u>

**Ορισμός [4.39]:** Η $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται <u>ομοιόμορφα συνεχής</u>

$$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in D(f) \text{ με } |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

Η $f$ λέγεται <u>ομοιόμορφα συνεχής στο $A \subseteq D(f)$</u> $:\Longleftrightarrow$ η $f|_A$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, όπου $f|_A : A \to \mathbb{R}$ με $(f|_A)(x) := f(x)$ ο <u>περιορισμός της $f$ στο $A$</u>

**Παρατήρηση:** Απ' την σύγκριση των ορισμών της <u>συνέχειας</u> με την <u>ομοιόμορφη συνέχεια</u> φαίνεται η <u>σημασία της σειράς των ποσοδεικτών</u>:

$f$ συνεχής $:\Longleftrightarrow \forall y \in D(f) \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D(f), |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$f$ ομοιόμορφα συνεχής

$$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D(f) \; \forall y \in D(f), |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

<u>Πρόταση</u>: $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$.

$f$ ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow$ $f$ συνεχής.

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω $\xi \in D(f)$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists\, \delta > 0$ $\forall x, y \in D(f)$ με $|x - y| < \delta$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Θεωρώντας δηλ. το $y = \xi$, $\forall x \in D(f)$ με $|x - \xi| < \delta$: $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$. [ Αφού αυτό ισχύει $\forall \varepsilon > 0$, η $f$ είναι συνεχής στο $\xi \in D(f)$, και αφού αυτό ισχύει $\forall \xi \in D(f)$, η $f$ είναι συνεχής. ] $\square$

<u>Παρατήρηση</u>: $f$ συνεχής $\not\Rightarrow$ $f$ ομοιόμορφα συνεχής:

π.χ. η $f(x) = x^2$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού π.χ. για $\varepsilon = 1$ και κάθε $\delta > 0$ τα $x = \frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}$, $y = \frac{2}{\delta}$

ικανοποιούν την απαίτηση $|x-y|<\delta$, αλλά

$$|x^2-y^2| = |x-y|\,|x+y| = \frac{\delta}{2}\left(\frac{4}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right) > 2 > 1$$

(δηλ. $\exists\, \varepsilon>0\ \forall\, \delta>0\ \exists\, x,y\in D(f)$ με $|x-y|<\delta$ και $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$)

<u>Παράδειγμα</u> [4.41]: Η $f(x)=x^2$, $x\in[0,1]$ (με $D(f)=[0,1]$) είναι ομοιόμορφα συνεχής, αφού για κάθε $\varepsilon>0$ $\exists\, \delta:=\frac{\varepsilon}{2}>0$ $\forall\, x,y\in[0,1]$ με $|x-y|<\delta$ : $|x^2-y^2| = |x-y|\,|x+y| < \delta|x+y| \leq 2\delta=\varepsilon$

<u>Παράδειγμα</u> [4.43]: Η $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,1)$ είναι συνεχής, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής, αφού π.χ. για $\varepsilon=\frac{1}{2}$ και κάθε $\delta\in(0,1)$ $\exists\, x=\delta\in(0,1)$, $y=\frac{\delta}{2}\in(0,1)$ με $x-y=\frac{\delta}{2}<\delta$ και $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy} \geq \frac{|x-y|}{x^2} = \frac{\delta}{2}\frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{2\delta} > \frac{1}{2}$. Για $\delta\geq 1$ $\exists\, x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}$, $x,y\in(0,1)$, $x-y=\frac{1}{4}<\delta$, $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = 2 > \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα [4.42]: Η $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής αφού $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta := \varepsilon > 0 \; \forall x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$: $|\sin x - \sin y| \underset{(*)}{\leq} |x-y| < \varepsilon$

[(*): βλ. Ασκ. [4.2 γ)], Σημ. 8.2]

Θεώρημα [4.44]: $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ $f$ ομοιόμορφα συνεχής

Απόδειξη: Έστω ότι η $f$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε $\exists \varepsilon > 0$ $\forall \delta > 0 \; \exists x, y \in [\alpha, \beta]$ με $|x-y| < \delta$ και $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$, δηλ., ειδικότερα, για $\delta_\nu := \frac{1}{\nu} > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\exists (x_\nu), (y_\nu) \subset [\alpha, \beta]$ με $|x_\nu - y_\nu| < \frac{1}{\nu}$ και $|f(x_\nu) - f(y_\nu)| \geq \varepsilon$

$\underset{\text{Bolzano-Weierstrass}}{\Longrightarrow} \exists (x_{k_\nu}) \subset (x_\nu)$ με $x_{k_\nu} \to \xi \in [\alpha, \beta] \underset{f \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} f(x_{k_\nu}) \to \xi$. (1)

Επίσης, αφού $|y_{k_\nu} - \xi| \leq |y_{k_\nu} - x_{k_\nu}| + |x_{k_\nu} - \xi| \underset{k_\nu \geq \nu}{<} \frac{1}{\nu} + |x_{k_\nu} - \xi| \to 0$

$\underset{\text{Θ. ισοσυγκλ. ακ.}}{\Longrightarrow} y_{k_\nu} \to \xi \underset{f \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} f(y_{k_\nu}) \to \xi$. (2). (1), (2) $\Rightarrow |f(x_{k_\nu}) - f(y_{k_\nu})| \to 0$,

δηλ. $\exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \forall \nu > \nu_0 \; |f(x_{k_\nu}) - f(y_{k_\nu})| < \varepsilon$, άτοπο. $\square$

<u>Θεώρημα</u> [4.45]: $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq D(f)$. Τότε:

$f$ ομοιόμορφα συνεχής στο $A \iff \forall (x_\nu), (y_\nu) \subset A$, $x_\nu - y_\nu \to 0$: $f(x_\nu) - f(y_\nu) \to 0$

<u>Απόδειξη</u>: $\Rightarrow$: Έστω $(x_\nu), (y_\nu) \subset A$, $x_\nu - y_\nu \to 0$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists \delta > 0 \ \forall x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ και $\exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0: |x_\nu - y_\nu| < \delta \Rightarrow \forall \nu > \nu_0$: $|f(x_\nu) - f(y_\nu)| < \varepsilon$. Άρα $f(x_\nu) - f(y_\nu) \to 0$.

$\Leftarrow$: Έστω ότι η $f$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, δηλ. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ και $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon \Rightarrow$ (ειδικότερα, για $\delta_\nu := \frac{1}{\nu} > 0$) $\exists (x_\nu), (y_\nu) \in A$ με $|x_\nu - y_\nu| < \frac{1}{\nu} \to 0$ και $|f(x_\nu) - f(y_\nu)| \geq \varepsilon > 0$ και άρα $f(x_\nu) - f(y_\nu) \not\to 0$ (γιατί αν $f(x_\nu) - f(y_\nu) \to 0 \iff |f(x_\nu) - f(y_\nu)| \to 0 \Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu > \nu_0 \ |f(x_\nu) - f(y_\nu)| < \varepsilon$, άτοπο).

[Δείξαμε λοιπόν: <u>δεν</u> ισχύει το αριστερό μέρος της ισοδ. $\Rightarrow$ <u>δεν</u> ισχύει το δεξιό δηλ., <u>ισοδύναμα</u>, ισχύει το δεξιό μέρος $\Rightarrow$ ισχύει το αριστερό]

<u>Πόρισμα</u> (Κριτήριο μη ομοιόμορφης συνέχειας): $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $A \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Τότε:
$\exists (x_\nu), (y_\nu) \subset A$, $x_\nu - y_\nu \to 0$, $f(x_\nu) - f(y_\nu) \not\to 0$ [$\iff \exists (x_\nu), (y_\nu) \in A$ και $\varepsilon > 0$: $x_\nu - y_\nu \to 0$, $|f(x_\nu) - f(y_\nu)| \geq \varepsilon \ \forall \nu \in \mathbb{N}$] $\Rightarrow$ η $f$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $A$.

Παραδείγματα: α) $f(x)=\frac{1}{x},\ x>0$: $x_\nu=\frac{1}{\nu},\ y_\nu=\frac{1}{\nu+1} \Rightarrow |f(x_\nu)-f(y_\nu)|=1$

α) $f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$: $x_\nu=\nu+\frac{1}{\nu},\ y_\nu=\nu \Rightarrow |f(x_\nu)-f(y_\nu)|=2+\frac{1}{\nu^2}>2$

Θεώρημα [4.46]: $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε

$f$ ομοιόμορφα συνεχής $\Longleftrightarrow$ $\exists \lim_{x\to\alpha+} f(x),\ \lim_{x\to\beta-} f(x)\in\mathbb{R}$

Απόδειξη:

$\Rightarrow$: Αφού το $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι σ.σ. του $(\alpha,\beta)$ (από δεξιά) και το $\beta\in\mathbb{R}$ είναι σ.σ. του $(\alpha,\beta)$ (από αριστερά), αρκεί, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκλισης του Cauchy για συναρτήσεις (Θ. [3.51]), να δείξουμε για $\gamma\in\{\alpha,\beta\}$:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta'>0\ \forall x_1,x_2\in(\alpha,\beta) \text{ με } |x_1-\gamma|<\delta',\ |x_2-\gamma|<\delta': |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

Συνεπώς, αφού $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $|x_1-x_2|<\delta$: $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, επιλέγοντας $\delta':=\frac{\delta}{2}$ έχουμε $\forall x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $|x_1-\gamma|<\frac{\delta}{2},\ |x_2-\gamma|<\frac{\delta}{2}$:

$|x_1-x_2| = |x_1-\gamma-(x_2-\gamma)| \le |x_1-\gamma|+|x_2-\gamma| < \delta$ και άρα $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

19.1/11

$\Leftarrow$: Η $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (\alpha, \beta) \\ \lim_{x \to \alpha+} f(x), & x = \alpha \\ \lim_{x \to \beta-} f(x), & x = \beta \end{cases}$ είναι συνεχής

$\underset{\Theta.[4.44]}{\Longrightarrow}$ Η $g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

$\underset{(*)}{\Longrightarrow}$ η $g|_{(\alpha,\beta)} = f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

[(*): $f$ ομοιόμορφα συνεχής $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D(f),\ |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in A \subseteq D(f),\ |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $f$ ομοιόμορφα συνεχής στο $A \subseteq D(f)$ $\Leftrightarrow$ $f|_A$ ομοιόμορφα συνεχής]

$\square$

**Θεώρημα [4.47]:**

$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$ $\Rightarrow$ $f$ ομοιόμορφα συνεχής

**Απόδειξη:** Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε

1) $f$ συνεχής $\Rightarrow$ $f|_{[0,\alpha]}$ συνεχής $\underset{\Theta.[4.44]}{\Longrightarrow}$ $f|_{[0,\alpha]}$ ομοιόμορφα συνεχής
$\Rightarrow$ $\exists \delta_1 > 0\ \forall x, y \in [0, \alpha],\ |x-y| < \delta_1 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

2) $f$ συνεχής $\Rightarrow$ $f$ συνεχής στο $\alpha$ $\Rightarrow$ $\exists \delta_2 > 0\ \forall x \in [0, \infty),\ |x - \alpha| < \delta_2 : |f(x) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$

3) $f$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha, \infty)$ $\Rightarrow$ $\exists \delta_3 > 0\ \forall x, y \in [\alpha, \infty),\ |x-y| < \delta_3 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\forall x, y \in [0, \infty),\ |x-y| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (αν $x < \alpha < y$, τότε
$0 < \alpha - x < y - x < \delta_2$, $0 < y - \alpha < y - x < \delta_2$ $\Rightarrow$ $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(\alpha)| + |f(y) - f(\alpha)| < \varepsilon$) $\square$

<u>Εφαρμογή</u> [1., § 4.6] : Η $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής

<u>Απόδειξη</u> : Η $f$ είναι συνεχής (στο $D(f) = [0, \infty)$) (Παραδ. ε), Σημ. 7.2/14) και ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha, \infty)$ για κάθε $\alpha > 0$, αφού $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta := \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\alpha}} > 0$ $\forall\, x, y \in [\alpha, \infty)$, $|x-y| < \delta$ : $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \underset{(*)}{\leq} \frac{|x-y|}{2\sqrt{\alpha}} < \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} = \varepsilon$ $\underset{\Theta.[4.47]}{\Rightarrow}$ η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής (στο $D(f) = [0, \infty)$).

[(*): Η $f$ είναι αύξουσα, βλ. Παραδ. [4.52], Σημ. ]. $\square$

<u>Εφαρμογή</u> [3., § 4.6]: $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, <u>συνάρτηση Lipschitz</u>

$:\Leftrightarrow \exists\, k > 0\ \forall\, x, y \in D(f) : |f(x) - f(y)| \leq k|x-y| \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ ομοιόμορφα συνεχής

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε για $\delta := \frac{\varepsilon}{k} > 0$ ισχύει $\forall\, x, y \in D(f)$ με $|x-y| < \delta$: $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y| < k\delta = \varepsilon$. Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού π.χ. η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$, αλλά $\forall k > 0$ $\exists\, x := \min\{\frac{1}{4k^2}, \alpha\} \in [0, \alpha]$ με $\sqrt{x} = \min\{\frac{1}{2k}, \sqrt{\alpha}\} > kx = \min\{\frac{1}{4k}, k\alpha\}$, αφού αν $x = \frac{1}{4k^2} \leq \alpha$, τότε $kx = \frac{1}{4k} \leq k\alpha$ και $\sqrt{x} = \frac{1}{2k} \leq \sqrt{\alpha}$, ενώ αν $x = \alpha \leq \frac{1}{4k^2}$ τότε $kx = k\alpha \leq \frac{1}{4k}$ και $\sqrt{x} = \sqrt{\alpha} \leq \frac{1}{2k}$ με $k\alpha < \sqrt{\alpha}$, αφού $\alpha < \frac{1}{k^2}$. $\square$

**Εφαρμογή** [4. (ευθύ), §4.6]: $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $D(f) \subseteq \mathbb{R}$, ομοιόμορφα συνεχής, $(x_\nu) \subset D(f)$ ακολουθία Cauchy $\Rightarrow$ $(f(x_\nu))$ ακολουθία Cauchy

**Απόδειξη**: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists\, \delta > 0$ $\forall x, y \in D(f)$ με $|x-y| < \delta$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ και $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}$ $\forall \nu, \mu > \nu_0$: $|x_\nu - x_\mu| < \delta \Rightarrow |f(x_\nu) - f(x_\mu)| < \varepsilon$. $\square$

**Εφαρμογή** [2., §4.6]:

α) Οι $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ είναι, ενώ η $fg$ δεν είναι, ομοιόμορφα συνεχείς.

β) Το γινόμενο δύο ομοιόμορφα συνεχών φραγμένων συναρτήσεων είναι ομοιόμ. συνεχές.

**Απόδειξη**: α) $g$: βλ. Παραδ. [4.42], $f$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta := \varepsilon > 0$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$: $|x-y| < \delta = \varepsilon$.
Η $(fg)(x) = x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, σύμφωνα με το Θ. [4.45] (ή το Πόρισμά του), αφού για $x_\nu = 2\pi\nu + \frac{1}{\nu}$, $y_\nu = 2\pi\nu$ έχουμε $x_\nu - y_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0$ και
$(fg)(x_\nu) - (fg)(y_\nu) = \left(2\pi\nu + \frac{1}{\nu}\right) \sin\frac{1}{\nu} \longrightarrow 2\pi \neq 0$ $\left(\nu \sin\frac{1}{\nu} \to 1: \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, [§3.6, 1.]\right)$

β) Έστω $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $g: D(g) \to \mathbb{R}$, $D(f), D(g) \subseteq \mathbb{R}$, ομοιόμορφα συνεχείς με $|f(x)| \le F$ $\forall x \in D(f)$, $|g(x)| \le G$ $\forall x \in D(g)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists\, \delta_1 > 0$ $\forall x, y \in D(f)$, $|x-y| < \delta_1$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $\exists\, \delta_2 > 0$ $\forall x, y \in D(g)$, $|x-y| < \delta_2$: $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ Για $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ $\forall x, y \in D(f) \cap D(g)$, $|x-y| < \delta$:
$|(fg)(x) - (fg)(y)| \le |f(x) - f(y)|\,|g(x)| + |f(y)|\,|g(x) - g(y)| < \varepsilon\,(G+F)$ $\square$

# Ασκήσεις ομοιόμορφης συνέχειας [Ντούγιας, Απειροστικός Λογισμός I] 9.1/14

1. Άσκηση [4.34, α), β), 4.36]:
Να αποδείξετε ότι οι $\frac{1}{x}$, $x \geq 1$, $\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x^2}$, $x \geq \alpha > 0$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

2. Άσκηση: Να αποδείξετε ότι
α) η $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x > 0$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.
β) οι $\sin(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, $\sin \frac{1}{x}$, $x > 0$, $e^x \cos \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$, $\frac{1}{x-1}$, $x \in (0,1)$
δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

3. Άσκηση [4.63]:
$f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής, $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο $\Rightarrow$ $f$ φραγμένη.

4. Άσκηση [4.67]:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f$ συνεχής στο $0$
$\Rightarrow$ $f$ ομοιόμορφα συνεχής.

5. Άσκηση [4.73]:

$f : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ με $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y| \quad \forall x, y \in [\alpha, \beta]$,

$x_{\nu+1} = \frac{1}{2}(x_\nu + f(x_\nu))$, $\nu \in \mathbb{N}$, $x_1 \in [\alpha, \beta]$

Να αποδείξετε ότι:

α) η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

β) $x_\nu \in [\alpha, \beta] \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

γ) η $(x_\nu)$ είναι ακολουθία Cauchy

δ) $\exists\, \xi \in [\alpha, \beta] : f(\xi) = \xi$.

Λύσεις [Γ.]: 9.1.16

1. Η $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\geq 1$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, αφού $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta:=\varepsilon>0\ \forall x,y\geq 1$ με $|x-y|<\delta$: $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{|x-y|}{xy}\leq |x-y|<\delta=\varepsilon$

Η $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι ομοιομ. συν., αφού $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta:=\varepsilon>0\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta$: $\left|\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\right|=\frac{|x-y||x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)}\leq |x-y|\frac{|x|+|y|}{(1+x^2)(1+y^2)}\underset{(*)}{\leq}|x-y|<\delta=\varepsilon$

$(*)$: $\forall x,y\geq 0$: $x+y\leq(1+x^2)(1+y^2)$: χ.β.τ.γ. $x\leq y\Rightarrow x+y\leq 2y\leq 1+y^2\leq(1+y^2)(1+x^2)$

Η $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\geq\alpha>0$ είναι ομοιόμ. συν., αφού $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta:=\varepsilon\frac{\alpha^3}{2}>0\ \forall x,y\geq\alpha$ με $|x-y|<\delta$: $\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right|=\frac{|x-y|(x+y)}{x^2y^2}=|x-y|\left(\frac{1}{xy^2}+\frac{1}{x^2y}\right)\leq|x-y|\frac{2}{\alpha^3}<\delta\frac{2}{\alpha^3}=\varepsilon$

2. α) Η $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $x>0$, είναι συνεχής ως πηλίκο, σύνθεση και γινόμενο συνεχών. Η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha,\infty)$, $\alpha>0$, αφού $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta:=\varepsilon\frac{\alpha}{\alpha+1}>0\ \forall\ x,y\geq\alpha$ με $|x-y|<\delta$: $\left|x\sin\frac{1}{x}-y\sin\frac{1}{y}\right|\leq|x-y|\left|\sin\frac{1}{x}\right|+$
$+|y|\left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{y}\right|\underset{(*)}{\leq}|x-y|+|y|\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\leq|x-y|\left(1+\frac{1}{|x|}\right)\leq|x-y|\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)<\delta\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)=\varepsilon$.

$\left[(*) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : |\sin\alpha - \sin\beta| = 2\left|\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right| \leq |\alpha-\beta|\right]$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ $\left[\,|x \sin\frac{1}{x}| \leq |x|\,\right]$, η $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ είναι συνεχής και ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$ $\underset{\Theta.[4.47]}{\Longrightarrow}$ η $g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow$ η $g|_{(0,\infty)} = f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2.β) Οι ακόλουθες συναρτήσεις $f$ δεν είναι ομοιομ. συνεχείς, επειδή $\exists\ (x_\nu), (y_\nu) \subset D(f)$ με $x_\nu - y_\nu \to 0$ και $f(x_\nu) - f(y_\nu) \not\to 0$ (Θ. [4.47])

1) $f(x) = \sin(x^2)$, $D(f) = \mathbb{R}$ : $x_\nu = \sqrt{2\pi\nu} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}$, $y_\nu = \sqrt{2\pi\nu} \Rightarrow |f(x_\nu) - f(y_\nu)| = |\sin(\frac{1}{\nu} + 2\sqrt{2\pi})|$
$\longrightarrow |\sin(2\sqrt{2\pi})| \neq 0$.

2) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ : $x_\nu = \frac{1}{(2\pi + \frac{\pi}{2})(2\nu-1)}$, $y_\nu = \frac{1}{2\pi(2\nu-1)} > 0 \Rightarrow$
$|f(x_\nu) - f(y_\nu)| = |\sin(\pi\nu - \frac{\pi}{2})| = 1 \not\to 0$

3) $f(x) = e^x \cos\frac{1}{x}$, $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ : $x_\nu = \frac{1}{2\pi\nu}$, $y_\nu = \frac{1}{2\pi\nu + \frac{\pi}{2}} \in (0,1) \Rightarrow$
$f(x_\nu) - f(y_\nu) = f(x_\nu) = e^{\frac{1}{2\pi\nu}} = \left(e^{\frac{1}{2\pi}}\right)^{\frac{1}{\nu}} \to 1 \neq 0$

4) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ : $x_\nu = 1 - \frac{1}{2\nu}$, $y_\nu = 1 - \frac{1}{4\nu} \in (0,1) \Rightarrow f(x_\nu) - f(y_\nu) = -2\nu + 4\nu = 2\nu \to \infty$ $(\not\to 0)$

3. Έστω $f$ μη φραγμένη, δηλ. $f(A)$ μη φραγμένο, δηλ. $\forall M>0\ \exists x\in A:$ $|f(x)|>M$. Ειδικότερα $\forall \nu\in\mathbb{N}\ \exists x_\nu\in A: |f(x_\nu)|>\nu$, δηλ. $\exists (x_\nu)\subset A: |f(x_\nu)|\to\infty$.
Απ' την άλλη, αφού $(x_\nu)\subset A$, $A$ φραγμένο $\overset{\text{Bolz.-W.}}{\Longrightarrow} \exists (x_{k_\nu})\subset A: x_{k_\nu}\to\xi$
$\Rightarrow (x_{k_\nu})$ ακολουθία Cauchy $\underset{[\text{Εφ. 4., §4.6}]}{\Longrightarrow} (f(x_{k_\nu}))$ ακολουθία Cauchy $\Rightarrow (f(x_{k_\nu}))$ συγκλίνει $\Rightarrow (f(x_{k_\nu}))$ φραγμένη, άτοπο αφού $|f(x_{k_\nu})|>k_\nu\geq\nu\ \forall\nu\in\mathbb{N}$.

4. $f(x+y)=f(x)+f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=f(x-y+y)=f(x-y)+f(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f(x)-f(y)=f(x-y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Έστω $(x_\nu),(y_\nu)\subset\mathbb{R}$ με $x_\nu-y_\nu\to 0$
$\Rightarrow f(x_\nu)-f(y_\nu)=f(x_\nu-y_\nu)\to 0$ αφού $f$ συνεχής στο $0$.

5. α) Η $f$ είναι συνάρτηση Lipschitz (με $k=\frac{1}{2}$) [Εφ. 3., §4.6]

δ) Η $f$ είναι συνεχής (από το α)) και άρα απ' το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer (Εφ. 2., §4.5) ακολουθεί το αποδεικτέο.

β) Αν $x_\nu\in[\alpha,\beta] \Rightarrow f(x_\nu)\in[\alpha,\beta] \Rightarrow 2\alpha=\alpha+\alpha\leq\alpha+f(x_\nu)\leq x_\nu+f(x_\nu)\leq\beta+f(x_\nu)$
$\leq\beta+\beta=2\beta \Rightarrow x_{\nu+1}=\frac{1}{2}(x_\nu+f(x_\nu))\in[\alpha,\beta]$, και αφού $x_1\in[\alpha,\beta] \underset{\text{Μαθ. Επαγ.}}{\Rightarrow} x_\nu\in[\alpha,\beta]\ \forall\nu\in\mathbb{N}$

γ) $\forall\nu>1: |x_{\nu+1}-x_\nu|\leq\frac{1}{2}\left(|x_\nu-x_{\nu-1}|+|f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|\right)<\frac{3}{4}|x_\nu-x_{\nu-1}| \Rightarrow |x_{\nu+1}-x_\nu|\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{\nu-1}|x_2-x_1|\ \forall\nu\in\mathbb{N}$
$\Rightarrow \forall\nu,k\in\mathbb{N}: |x_{\nu+k}-x_\nu|\leq\sum_{\lambda=0}^{\nu-1}|x_{\nu+\lambda+1}-x_{\nu+\lambda}|\leq\sum_{\lambda=0}^{\nu-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{\nu+\lambda-1}|x_2-x_1|=\left(\frac{3}{4}\right)^{\nu-1}4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{\nu}\right)|x_2-x_1|<\left(\frac{3}{4}\right)^{\nu}\frac{16}{3}|x_2-x_1|$
$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\nu_0\in\mathbb{N}\ \forall\nu>\nu_0\ \forall k\in\mathbb{N}: |x_{\nu+k}-x_\nu|<\varepsilon\frac{16}{3}|x_2-x_1|$ $\square$