[Κεφ. 5] Παράγωγος συνάρτησης

[§ 5.1] Ορισμός της παραγώγου

Ορισμός [5.1]: Αν $f: \Delta \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \Delta$ σημείο συσσώρευσης (σ.σ.) του $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και $f'(\alpha) := \lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$, τότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο α και ο αριθμός $f'(\alpha)$ λέγεται παράγωγος της f στο α.

Αν το $\alpha \in \Delta$ είναι σ.σ. του Δ από αριστερά (αντίστοιχα, από δεξιά) και $f'_-(\alpha) := \lim\limits_{x \to \alpha-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$ (αντ., $f'_+(\alpha) := \lim\limits_{x \to \alpha+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$) λέμε ότι η f παραγωγίζεται στο α από αριστερά (αντ., από δεξιά) και το $f'_-(\alpha)$ (αντ. $f'_+(\alpha)$) λέγεται παράγωγος της f στο α από αριστερά (αντ., από δεξιά). Αν το $\alpha \in \Delta$ είναι σ.σ. του Δ και από αριστερά και από δεξιά: η f παραγωγίζεται στο $\alpha \iff f'_-(\alpha) = f'_+(\alpha) = f'(\alpha) \in \mathbb{R}$

Αν το $\alpha \in \Delta$ είναι σ.σ. του Δ μόνο από αριστερά: $f'(\alpha) = f'_-(\alpha)$,

αν το $\alpha \in \Delta$ είναι σ.σ. του Δ μόνο από δεξιά: $f'(\alpha) = f'_+(\alpha)$.

Η f λέγεται <u>παραγωγίσιμη στο $A \subseteq \Delta$</u>, αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\alpha \in A$, και η $f' : A \to \mathbb{R}$, όπου $f'(\alpha)$ η παράγωγος της f στο α, λέγεται <u>παράγωγος της f στο A</u>.

Η f λέγεται <u>παραγωγίσιμη</u>, αν είναι παραγωγίσιμη στο Δ, και η $f' : \Delta \to \mathbb{R}$, όπου $f'(\alpha)$ η παράγωγος της f στο $\alpha \in \Delta$, λέγεται <u>παράγωγος της f</u>.

Απ' τα προηγούμενα συνεπάγεται: η $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη $\iff \exists\, f'(x)\ (\in \mathbb{R})\ \forall x \in (\alpha, \beta)$, $f'(\alpha) := f'_+(\alpha)$, $f'(\beta) := f'_-(\beta)\ (\in \mathbb{R})$

Παρατήρηση [5.6]: Προφανώς, $f'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$,

$f'_-(\alpha) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$, $f'_+(\alpha) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$

Παρατήρηση [5.7]: Προφανώς, η $f : \Delta \to \mathbb{R}$ παραγωγίζεται στο α $\Longleftrightarrow$

$\alpha \in \Delta$ σ.σ. του $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και $\forall (x_\nu) \subset \Delta \setminus \{\alpha\}$ με $x_\nu \to \alpha$:

$$\frac{f(x_\nu) - f(\alpha)}{x_\nu - \alpha} \to f'(\alpha) \in \mathbb{R}$$

Ανάλογα, η f παραγωγίζεται στο α από αριστερά (αντ., από δεξιά) $\Longleftrightarrow$

$\alpha \in \Delta$ σ.σ. του $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ από αριστερά (αντ. από δεξιά) και

$\forall (x_\nu) \subset \Delta \cap (-\infty, \alpha)$ (αντ., $(x_\nu) \subset \Delta \cap (\alpha, \infty)$) με $x_\nu \to \alpha$:

$$\frac{f(x_\nu) - f(\alpha)}{x_\nu - \alpha} \to f'_-(\alpha) \; (\text{αντ. } f'_+(\alpha)) \in \mathbb{R}$$

<u>Παρατήρηση</u> [5.3] : Προφανώς, η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο α (από αριστερά, από δεξιά), όταν ορίζεται, είναι μοναδική.

[Το "Προφανώς, ..." στις προηγούμενες παρατηρήσεις σημαίνει ότι αυτές προκύπτουν άμεσα από τις ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων.]

<u>Παρατήρηση</u> ["5.10"] : Προφανώς, $f'(\alpha) \in \mathbb{R}$ παράγωγος της $f : \Delta \to \mathbb{R}$ στο α

$\Longleftrightarrow$ $\alpha \in \Delta$ σ.σ. του Δ και $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ με $|x-\alpha| < \delta$:

$$|\lambda_\alpha(x)| < \varepsilon, \quad \text{όπου} \quad \lambda_\alpha(x) := \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} - f'(\alpha), \quad x \in \Delta \setminus \{\alpha\}$$

$\Longleftrightarrow$ $\alpha \in \Delta$ σ.σ. του Δ και $\lim\limits_{x \to \alpha} \lambda_\alpha(x) = 0$

Θεώρημα [5.10]:

Η $f : \Delta \to \mathbb{R}$, $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο α $\iff$

$\alpha \in \Delta$ σ.σ. του Δ και

$\exists\, c \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ και $\lambda_\alpha : \Delta \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x \to \alpha} \lambda_\alpha(x) = 0$ και

$\forall\, x \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ με $|x - \alpha| < \delta$: $\quad f(x) - f(\alpha) = c\,(x-\alpha) + \lambda_\alpha(x)(x-\alpha) \quad (*)$

Απόδειξη:

$\Rightarrow$: Προκύπτει από τον Ορισμό [5.1] και την Παρατήρηση "5.10"

με $c := f'(\alpha)$, το λ_α της Παρατήρησης και αυθαίρετο $\delta > 0$.

$\Leftarrow$: Αφού $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = c$, $\exists$ το $f'(\alpha) = c \in \mathbb{R}$ του Ορ. [5.1] $\square$

Παρατηρήσεις:

α) Το $c \in \mathbb{R}$ του Θ. [5.10] είναι μοναδικό και είναι $c = f'(\alpha) := \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

β) Η (*) ισχύει και για $x=\alpha$.

γ) Ο περιορισμός σε μια περιοχή $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$, $\delta>0$, δεν είναι αναγκαίος, αλλά υποδηλώνει ότι <u>η παραγωγισιμότητα</u> (<u>όπως και η συνέχεια</u>) <u>είναι μια τοπική ιδιότητα</u>: f παραγωγίσιμη στο α $\Longleftrightarrow$ $f|_{(\alpha-\delta,\alpha+\delta)}$, $\delta>0$, παραγωγίσιμη στο α με $f'(\alpha) = \left(f|_{(\alpha-\delta,\alpha+\delta)}\right)'(\alpha)$

Απ' τα προηγούμενα προκύπτει:

$f: \Delta \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο σ.σ. $\alpha \in \Delta \subseteq \mathbb{R}$ του Δ με παράγωγο $f'(\alpha) \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$ $\exists\, \lambda_\alpha : \Delta \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\alpha} \lambda_\alpha(x) = 0 = \lambda_\alpha(0)$:

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) + \lambda_\alpha(x)(x-\alpha) \quad \forall x \in \Delta$$

[Η <u>γραμμική συνάρτηση</u> (!) $df(\alpha): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $df(\alpha)(h) := f'(\alpha)h$, λέγεται <u>διαφορικό της f στο α</u>, για περισσότερα βλ. [Nz., §5.6]]

<u>Παρατήρηση</u>: (Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου)

Για μια συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, η εξίσωση

$$y - f(\alpha) = \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}(x-\alpha), \quad \alpha, \alpha+h \in I, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

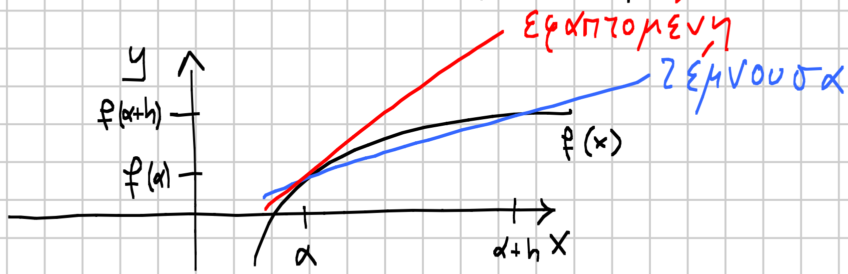
περιγράφει την τέμνουσα (ευθεία) του γραφήματος της f στα σημεία $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\alpha+h, f(\alpha+h))$.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο α, για $h \to 0$ η εξίσωση

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

περιγράφει την εφαπτομένη (ευθεία) του γραφήματος της f στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$

(για περισσότερα, βλ. [Ντ., §5.5])



[§5.2] Ιδιότητες παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Θεώρημα [5.11]: $f:\Delta\to\mathbb{R}$, $\Delta\subseteq\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\alpha \Longrightarrow f$ συνεχής στο α

Απόδειξη: $f:\Delta\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\alpha \Longleftrightarrow \alpha\in\Delta$ σ.σ. του Δ και

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to\alpha} f(x) \underset{(*)}{=} \lim_{x\to\alpha}\left(f(x)-f(\alpha)\right)+f(\alpha)$$

$$\underset{(*)}{=} \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\cdot \underbrace{\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)}_{=0} + f(\alpha) = f(\alpha)$$

[(*): άλγεβρα ορίων συναρτήσεων, Θ.[3.42]] $\square$

Παρατήρηση: $f:\Delta\to\mathbb{R}$ συνεχής στο σ.σ. $\alpha\in\Delta$ του $\Delta\subseteq\mathbb{R}$ $\not\Longrightarrow$ f παραγωγ. στο α:

π.χ. η $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο 0, αλλά $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ ενώ $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$ [η $|x|$ δεν έχει εφαπτομένη στο 0:

]

Θεώρημα [5.14] (Άλγεβρα παραγωγίσιμων συναρτήσεων)

Έστω $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο α. Τότε οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο α:

α) kf, $k \in \mathbb{R}$, με $(kf)'(\alpha) = k f'(\alpha)$

β) $f+g$ με $(f+g)'(\alpha) = f'(\alpha) + g'(\alpha)$

γ) fg με $(fg)'(\alpha) = f'(\alpha) g(\alpha) + f(\alpha) g'(\alpha)$

δ) $\frac{f}{g}$, αν $g(\alpha) \neq 0$, με $\left(\frac{f}{g}\right)'(\alpha) = \dfrac{f'(\alpha) g(\alpha) - f(\alpha) g'(\alpha)}{(g(\alpha))^2}$

[Απόδειξη : Από το Θ. [5.10] έχουμε : $\alpha \in \Delta$ σ.σ. του Δ και $\exists\, f'(\alpha), g'(\alpha) \in \mathbb{R}$, $\delta_1, \delta_2 > 0$

$\lambda_\alpha, \mu_\alpha : \Delta \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to \alpha} \lambda_\alpha(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} \mu_\alpha(x) = 0$: $\forall x \in \Delta \cap N^*_\delta(\alpha)$, $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$:

$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) + \lambda_\alpha(x)(x-\alpha)$, $g(x) - g(\alpha) = g'(\alpha)(x-\alpha) + \mu_\alpha(x)(x-\alpha)$

$\Longrightarrow$

α) $(kf)(x) - (kf)(\alpha) = \left(kf'(\alpha)\right)(x-\alpha) + \underbrace{\left(k\lambda_\alpha(x)\right)}_{\xrightarrow[x\to\alpha]{} 0}(x-\alpha) \underset{\Theta.[5.10]}{\Longrightarrow} \exists\, (kf)'(\alpha) = kf'(\alpha) \in \mathbb{R}$

β) $(f+g)(x) - (f+g)(\alpha) = \left(f'(\alpha)+g'(\alpha)\right)(x-\alpha) + \underbrace{\left(\lambda_\alpha(x)+\mu_\alpha(x)\right)}_{\xrightarrow[x\to\alpha]{} 0}(x-\alpha) \underset{\Theta.[5.10]}{\Longrightarrow} \exists\, (f+g)'(\alpha) = f'(\alpha)+g'(\alpha) \in \mathbb{R}$

γ) $(fg)(x) - (fg)(\alpha) = \left(f(x)-f(\alpha)\right)g(x) + \left(g(x)-g(\alpha)\right)f(\alpha)$

$= \left(f(x)-f(\alpha)\right)g(\alpha) + \left(f(x)-f(\alpha)\right)\left(g(x)-g(\alpha)\right) + \left(g(x)-g(\alpha)\right)f(\alpha)$

$= \left(f'(\alpha)g(\alpha) + g'(\alpha)f(\alpha)\right)(x-\alpha) + \Big[\underbrace{\lambda_\alpha(x)}_{\xrightarrow[x\to\alpha]{} 0} + \Big(\underbrace{f(x)-f(\alpha)}_{\xrightarrow[x\to\alpha]{} 0}\Big)\Big(g'(\alpha)+\underbrace{\mu_\alpha(x)}_{\xrightarrow[x\to\alpha]{} 0}\Big) + \underbrace{\mu_\alpha(x)}_{\xrightarrow[x\to\alpha]{} 0}\Big](x-\alpha)$

$\underset{\Theta.[5.10]}{\Longrightarrow} \exists\, (fg)'(\alpha) = f'(\alpha)g(\alpha) + g'(\alpha)f(\alpha)$

δ) Δείχνουμε ότι η $\frac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο α αν $g(\alpha)\neq 0$ με $\left(\frac{1}{g}\right)'(\alpha) = \frac{-g'(\alpha)}{g^2(\alpha)}$ απ' το οποίο προκύπτει το ζητούμενο μέσω της γ).

Αφού $\frac{1}{g(x)} = h(g(x))$ όπου $h(x) = \frac{1}{x}$, $g(\alpha)\neq 0$ και $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x>0$ (βλ. Σημ. 9Α/2), το $\left(\frac{1}{g}\right)'(\alpha) = -\frac{g'(\alpha)}{g^2(\alpha)}$ προκύπτει από το επόμενο Θ.[5.16]. $\blacksquare$

Θεώρημα [5.16] (<u>Παράγωγος σύνθεσης συνάρτησης ή "κανόνας της αλυσίδας"</u>)

$f : \Delta \to \mathbb{R}$, $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο α και $g : f(\Delta) \to \mathbb{R}$

παραγωγίσιμη στο $\beta := f(\alpha) \Rightarrow g \circ f : \Delta \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο α

με $(g\circ f)'(\alpha) = g'(f(\alpha))\, f'(\alpha)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Θ. [5.10] : $\alpha \in \Delta$ σ.σ. του Δ και $\beta \in f(\Delta)$ σ.σ. του $f(\Delta)$,

$\exists\ \lambda_\alpha : \Delta \to \mathbb{R}$, $\mu_\beta : f(\Delta) \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x\to\alpha} \lambda_\alpha(x) = 0 =: \lambda_\alpha(\alpha)$,

$\lim_{y\to\beta} \mu_\beta(y) = 0 =: \mu_\beta(\beta)$ και

$$f(x) - f(\alpha) = \big(f'(\alpha) + \lambda_\alpha(x)\big)(x-\alpha) \quad \forall\, x \in \Delta \qquad (1)$$

$$g(y) - g(\beta) = \big(g'(\beta) + \mu_\beta(y)\big)(y-\beta) \quad \forall\, y \in f(\Delta) \qquad (2)$$

$$\Longrightarrow \quad g(f(x)) - g(f(\alpha)) \underset{(2)}{=} \Big(g'(\beta) + \mu_\beta(f(x))\Big)\,(f(x)-\beta)$$

$$\underset{(1)}{=} \Big(g'(\beta) + \mu_\beta(f(x))\Big)\Big(f'(\alpha) + \lambda_\alpha(x)\Big)\,(x-\alpha)$$

$$= \Big(g'(f(\alpha))f'(\alpha) + \rho_\alpha(x)\Big)\,(x-\alpha) \quad \forall x \in \Delta$$

με $\rho_\alpha(x) := \mu_\beta(f(x))\, f'(\alpha) + \lambda_\alpha(x)\Big(g'(\beta) + \mu_\beta(f(x))\Big) \quad \forall x \in \Delta$

και $\lim\limits_{x\to\alpha} \rho_\alpha(x) = 0$, αφού η f είναι συνεχής στο α (ως παραγωγίσιμη) και η μ_β είναι συνεχής στο $f(\alpha)$ με $\mu_\beta(f(\alpha)) = 0$, και άρα $\lim\limits_{x\to\alpha} \mu_\beta(f(x)) = \mu_\beta(f(\alpha)) = 0$,

και $\lim\limits_{x\to\alpha} \lambda_\alpha(x) = 0$.

$\underset{\text{θ. [5.10]}}{\Longrightarrow} \quad \exists\ (g\circ f)'(\alpha) = g'(f(\alpha))\,f'(\alpha) \in \mathbb{R}$. $\square$

9.2/13

Θεώρημα [5.17] (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης)

$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, γνήσια μονότονη και συνεχής, παραγωγίσιμη στο α με $f'(\alpha) \neq 0$ $\Rightarrow$ η $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $f(\alpha)$ και $(f^{-1})'(f(\alpha)) = \dfrac{1}{f'(\alpha)}$.

ή, ισοδύναμα, $(f^{-1})'(\beta) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\beta))}$ $\forall \beta \in f(I)$

Απόδειξη:

Θ. [4.49] : $\exists$ $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ γνήσια μονότονη και συνεχής.

f παραγωγίσιμη στο α $\Rightarrow$ $\alpha \in I$ σ.σ. του $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα

$\Rightarrow$ $\exists\, [m, M] \subseteq I$, $m < M$: $\alpha \in [m, M]$ $\underset{\text{Θ.[4.35]}}{\Rightarrow}$ $f(\alpha) \in f([m, M])$ $(\subseteq f(I))$

κλειστό και φραγμένο διάστημα $\Rightarrow$ $f(\alpha)$ σ.σ. του $f(I)$

Έστω $(y_\nu) \subset f(I) \setminus \{f(\alpha)\}$ με $y_\nu \to f(\alpha)$ 9.2/14

$\underset{f^{-1}\ 1-1\ \text{και συν.}}{\Longrightarrow}$ $\exists\ (x_\nu) \subset I \setminus \{\alpha\}$, $x_\nu = f^{-1}(y_\nu) \longrightarrow f^{-1}(f(\alpha)) = \alpha$

$\underset{f\ \text{παραγ. στο}\ \alpha}{\Longrightarrow}$ $$\frac{f(x_\nu) - f(\alpha)}{x_\nu - \alpha} = \frac{y_\nu - f(\alpha)}{f^{-1}(y_\nu) - f^{-1}(f(\alpha))} \longrightarrow f'(\alpha) \neq 0$$

$\underset{\text{αλγ. ορίων ακολ.}}{\Longrightarrow}$ $$\frac{f^{-1}(y_\nu) - f^{-1}(f(\alpha))}{y_\nu - f(\alpha)} \longrightarrow \frac{1}{f'(\alpha)} \in \mathbb{R}$$

$\square$

<u>Παρατήρηση</u>: Συχνά, αφού $f = (f^{-1})^{-1}$, χρησιμοποιείται ο τύπος:

$$f'(\beta) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(\beta))} \quad \forall\ \beta \in f^{-1}(I)$$