Περιεχόμενα διδαχθείσας ύλης Απειροστικού Λογισμού Ι, χ.Ε. 2011-12, Ιωάννινα, 1ο Εξάμηνο Τμήματος Μαθηματικών, Δεύτερο Τμήμα (άρτιοι αρ. μητρ.), Διδάσκων: Γ. Γιαννούλης

Notiztitel 15.02.2012

Πράγματα που πρέπει να γνωρίζετε για την επιτυχή εξέτασή σας στον Α.Λ. Ι:

[0 : Βασικές ιδιότητες συναρτήσεων, εύρεση πεδίου ορισμού, συνόλου τιμών, σύνθεσης και αντίστροφης συνάρτησης, ιδιότητες απόλυτης τιμής, ανισότητα Bernoulli, χρήση μαθ. επαγωγής και απαγωγής εις άτοπον]

ΓΕΝΙΚΑ

1 : Αξιώματα που ορίζουν τον $\mathbb{R}$, ιδιαίτερα το αξίωμα της πληρότητας, Αρχιμήδεια Ιδιότητα, ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού, απόδειξη ότι $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, απόδειξη ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πλήρες, ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί του $\sup A$, $\inf A$ και ιδιότητές τους, εύρεση αυτών για δεδομένο A. Διαστήματα, περιοχές και σημεία συσσώρευσης υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ακολουθίες και ιδιότητές τους: φραγμένες, μονότονες, συγκλίνουσες, μηδενική, απειριζόμενες, υπακολουθίες, ακολουθίες Cauchy.

Εργαλεία προσδιορισμού σύγκλισης και ορίων: Άλγεβρα Ορίων, Θ. Ισοσυγκλ., Εφ. [1. §1.6], Μονότονη + φραγμένη $\Rightarrow$ Συγκλίνουσα, Κριτήριο Cauchy, $\alpha_\nu \le \beta_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} \lim \alpha_\nu \le \lim \beta_\nu, & \text{αν υπάρχουν} \\ \beta_\nu \to \infty, & \text{αν } \alpha_\nu \to \infty \\ \alpha_\nu \to -\infty, & \text{αν } \beta_\nu \to -\infty \end{cases}$,

$\alpha_\nu \to 0 \underset{\alpha_\nu > 0}{\iff} \frac{1}{\alpha_\nu} \to \infty$, Θ. Bolzano-Weierstrass, $\alpha_\nu \to \ell \iff \{\alpha_{2\nu} \to \ell, \alpha_{2\nu-1} \to \ell\}$

Εφαρμογή των πιο πάνω εργαλείων για την απόδειξη σύγκλισης και/ή τον υπολογισμό ορίων ακολουθιών (<u>και</u> αναγωγικού τύπου).

Όρια: $\frac{1}{\nu} \to 0$, $\alpha^\nu \to 0$ για $|\alpha| < 1$, $\alpha^{\frac{1}{\nu}} \to 1$ για $\alpha > 0$, $\nu^{\frac{1}{\nu}} \to 1$, $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \to e$

2 :

ΣΕΙΡΕΣ

Σειρές: ορισμός, φραγμένες, μονότονες, συγκλίνουσες (απόλυτα $\Rightarrow$ υπό συνθήκη), απειριζόμενες, αποκλίνουσες, εναλλασσόμενες.

Κριτήρια σύγκλισης (ή μη) και υπολογισμού ορίων (σειρών):

$\sum a_\nu$ συγκλίνει $\Rightarrow a_\nu \to 0$, $\sum a_\nu, \sum \beta_\nu$ συγκλ. $\Rightarrow \sum(\alpha a_\nu + \beta\beta_\nu)$ συγκλ. $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$\sum a_\nu$ φραγμένη, $a_\nu \geq 0 \Rightarrow \sum a_\nu$ συγκλίνει, Κριτήριο Cauchy, Κριτήριο σύγκρισης, Οριακό κριτήριο σύγκρισης, Κριτήριο πηλίκου του D'Alembert, Κριτήριο ν-οστής ρίζας του Cauchy, Κριτήριο Leibniz για εναλλασσόμενες, Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy

Σειρές: $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu$ αποκλίνει, γεωμετρική $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu \begin{cases} = \frac{1}{1-\alpha}, & |\alpha|<1 \\ = \infty, & \alpha \geq 1 \\ \text{αποκλίνει}, & \alpha < -1 \end{cases}$

αρμονική σειρά ρ τάξης $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} \begin{cases} = \infty, & \rho \leq 1 \\ \text{συγκλίνει}, & \rho > 1 \end{cases}$

3: (Γενικευμένο) σημείο συσσώρευσης πεδίου ορισμού συνάρτησης, περιοχή, δακτυλική και πλευρική περιοχή σημείου συσσώρευσης. Ακολουθιακός και "ε-δ" (κατά Cauchy) ορισμός (γενικευμένου) ορίου συνάρτησης σε σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της, ισοδυναμία των δύο ορισμών και χρήση τους για απόδειξη σύγκλισης ή μη σύγκλισης σε (γενικευμένο) όριό της. Ιδιότητες συγκλινουσών συναρτήσεων (μοναδ. ορίου, άλγεβρα ορίων, ισοσυγκλίνουσες συναρτήσεις, συγκλίνουσα σε πραγματικό ⇒ φραγμένη σε δακτ. περιοχή του σ.σ., μηδενική επί φραγμένη = μηδενική, όριο σύνθεσης συναρτήσεων) και κριτήρια ύπαρξης ορίου (μονότονη και φραγμένη (σε δακτ. περ. σ.σ.) ⇒ συγκλίνουσα, Κριτήριο Cauchy) και χρήση τους για απόδειξη σύγκλισης και/ή υπολογισμό ορίου συνάρτησης. Φραγμένες, φραγμένες μακριά από το μηδέν, και μονότονες συναρτήσεις.

ΟΡΙΑ

Όρια: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$,

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$.

4: Συνέχεια συνάρτησης: ε-δ- και ακολουθιακός ορισμός και ισοδυναμία τους, απόδειξη της συνέχειας δοσμένης συνάρτησης με χρήση τους.
Είδη ασυνέχειας. Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων (φραγμένο μακριά απ' το μηδέν (Θ.[4.17]) άλγεβρα και σύνθεση συνεχών συν.) και εφαρμογή τους.
Ιδιότητες συνεχών συναρτ. ορισμένων σε κλειστό και φραγμένο διάστημα και Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, πορίσματα και εφαρμογή τους.
Ομοιόμορφη συνέχεια και κριτήριά της, απόδειξή της για δοσμένη συνάρτηση.
Συνέχεια και γνήσια μονοτονία αντίστροφης γνήσια μονότονης και συνεχούς συνάρτησης και εφαρμογή της.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Συνεχείς συναρτήσεις: σταθερή, ταυτοτική, πολυωνυμικές, ρητές, εκθετικές, λογαριθμική, $f(x)=x^\alpha$, $x>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, τριγωνομετρικές και υπερβολικές και αντίστροφές τους.

5: Παραγωγίσιμες συναρτήσεις : Ορισμός παραγώγου και ιδιότητες παραγωγίσιμων συναρτήσεων (ύπαρξη διαφορικού (Θ.[5.10]), παραγωγίσιμη ⇒ συνεχής, άλγεβρα παραγωγίσ. συν., παράγωγος σύνθεσης και αντίστροφης συνάρτησης) και εφαρμογή τους για τον υπολογισμό παραγώγου δοσμένης συνάρτησης. Παράγωγοι ανώτερης τάξης.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Τα βασικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού (Darboux, Rolle, Θεώρημα Μέσης Τιμής, Γενικευμένο ΘΜΤ), πορίσματα και εφαρμογές τους: Εύρεση ακριβούς αριθμού ριζών συνάρτησης, (τοπική ή ολική) ιδιότητα Lipschitz και ομοιόμ. συνέχεια παραγωγίσ. συν. (Εφ. [2, §5.9]), απόδειξη ανισοτήτων με τη βοήθεια του ΘΜΤ, κανόνες του L'Hôpital και εφαρμογή τους, Θεώρημα Taylor και εφαρμογή του, σειρές Taylor εκθετικής και λογαριθμικής συν., ημιτόνου, συνημιτόνου και διωνύμου, μελέτη συνάρτησης και γραφική παράστασή της: μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα (και χρήση της για την απόδειξη ανισοτήτων), σημεία καμπής, ασύμπτωτες και συμπεριφορά συνάρτ. στα άκρα του πεδίου ορισμού της

Παραγωγίσιμες συναρτ.: σταθερή, ταυτοτική, εκθετικές, λογαριθμική, $f(x) = x^{\alpha}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, τριγωνομετρικές, υπερβολικές και αντίστροφές τους.