[§3.6] Γενικευμένα ολοκληρώματα β΄ είδους

Ορισμός [3.55]

α) Έστω $f:(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη. Ορίζουμε ως γενικευμένο ολοκλήρωμα (γ.ο.) (β΄ είδους) της f στο $(\alpha,\beta]$ το όριο $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := \lim\limits_{k\to\alpha+}\int_k^\beta f(x)\,dx \in\mathbb{R}$ και λέμε ότι το γ.ο. υπάρχει ή συγκλίνει. Αν το όριο είναι $\pm\infty$ λέμε ότι το γ.ο. απειρίζεται θετικά/αρνητικά, ενώ αν δεν υπάρχει, λέμε ότι το γ.ο. αποκλίνει.

β) Έστω $f:[\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη. Ορίζουμε ως γ.ο. (β΄ είδους) της f στο $[\alpha,\beta)$ το $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := \lim\limits_{k\to\beta-}\int_\alpha^k f(x)\,dx\in\mathbb{R}$ και λέμε ...

γ) Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη. Ορίζουμε ως
γ.ο. (β' είδους) της f στο (α,β) το $\int_\alpha^\beta f(x)dx := \int_\alpha^\gamma f(x)dx +$
$+ \int_\gamma^\beta f(x)dx$, $\gamma\in(\alpha,\beta)$, αν και τα δύο τελευταία γ.ο. υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$) και λέμε ...

[Το άθροισμα του ορισμού είναι ανεξάρτητο του $\gamma\in(\alpha,\beta)$, πβ. το γ.ο. α' είδους $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$]

Πδ. [3.56]:

$f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx =$

$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$

ενώ $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\log x\,\Big|_\varepsilon^1\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}(-\log\varepsilon) = \infty$

[Παρατηρούμε ότι για γ.ο. β' είδους δεν ισχύει το Θ. [2.48]:
$f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκλ. $\Rightarrow$ $f^2:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκλ.] 11-13

Παρατήρηση [3.59]:

Έστω $f:[\alpha,\gamma)\cup(\gamma,\beta]$ τοπικά ολοκληρώσιμη. Τότε το γ.ο. (β' είδους) ορίζεται ως $\int_\alpha^\beta f(x)dx := \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx \in \mathbb{R}$, αν τα δύο τελευταία γ.ο. υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$) και λέμε ...

Να προσεχθεί ότι για να υπάρχει το γ.ο. αυτό δεν αρκεί να υπάρχει (στο $\mathbb{R}$) το $C.P.V. \int_\alpha^\beta f(x)dx := \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_\alpha^{\gamma-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\gamma+\varepsilon}^\beta f(x)dx\right)$.

Π.χ. το $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \lim\limits_{\eta\to 0+}\int_\eta^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\ln\varepsilon - \lim\limits_{\eta\to 0+}\ln\eta$ δεν υπάρχει (αφού δεν υπάρχουν τα επιμέρους γ.ο.), ενώ $C.P.V. \int_{-1}^1\frac{dx}{x} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln\varepsilon - \ln\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+} 0 = 0.$$

A[3.23] Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα: 11-14

α) $$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x-\alpha)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\alpha+\varepsilon}^\beta \frac{dx}{(x-\alpha)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \begin{cases} \frac{1}{1-p}\frac{1}{(x-\alpha)^{p-1}}\Big|_{\alpha+\varepsilon}^\beta, & p\neq 1 \\ \ln|x-\alpha|\Big|_{\alpha+\varepsilon}^\beta, & p=1\end{cases}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \begin{cases} \frac{1}{1-p}\frac{1}{(\beta-\alpha)^{p-1}} - \frac{1}{1-p}\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}, & p\neq 1 \\ \ln(\beta-\alpha) - \ln\varepsilon, & p=1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\frac{1}{(\beta-\alpha)^{p-1}}, & p<1 \\ \infty, & p\geq 1\end{cases}$$

β) $$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\eta\to 0+} \int_{1+\eta} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\operatorname{Arcsin} x\Big|_0^{1-\varepsilon}\right)$$

$$+ \lim_{\eta\to 0+}\left(\operatorname{Arccosh} x\Big|_{1+\eta}^2\right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arccosh} 2 = \frac{\pi}{2} + \log(2+\sqrt{3})$$

γ) $$\int_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{12}{5}} + x^{-\frac{4}{15}} - 2x^{-\frac{3}{5}}\right)dx \underset{\alpha)}{<} \infty$$

δ) $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x})} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x(-\sqrt[3]{|x|})} + \int_0^1 \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x})} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}} \underset{\alpha)}{=} \infty$$

[§3.7] Κριτήρια σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων β' είδους 11-15

Για να εξετάσουμε αν ένα γ.ο. β' είδους συγκλίνει (ή συγκλίνει απόλυτα ή υπό συνθήκη) το μετατρέπουμε με κατάλληλη αντικατάσταση σε γ.ο. α' είδους και χρησιμοποιούμε τα κριτήρια σύγκλισης (ή απόλυτης σύγκλισης) για γ.ο. α' είδους

[Προφανώς, ένα γ.ο. β' είδους της f συγκλίνει απόλυτα, αν συγκλίνει το αντίστοιχο γ.ο. β' είδους της $|f|$]

Οι αντικαταστάσεις αυτές είναι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx,\quad x\in(\alpha,\beta] \quad \xrightarrow{x=\alpha+\frac{1}{t}} \quad \int_{\frac{1}{\beta-\alpha}}^{\infty} \frac{1}{t^2} f\left(\alpha+\frac{1}{t}\right) dt$$

$$\left[\ x=\alpha-\frac{1}{t} \qquad \int_{-\infty}^{\frac{1}{\alpha-\beta}} \frac{1}{t^2} f\left(\alpha-\frac{1}{t}\right) dt\ \right]$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx,\quad x\in[\alpha,\beta) \quad \xrightarrow{x=\beta-\frac{1}{t}} \quad \int_{\frac{1}{\beta-\alpha}}^{\infty} \frac{1}{t^2} f\left(\beta-\frac{1}{t}\right) dt$$

$$\left[\ x=\beta+\frac{1}{t} \qquad \int_{-\infty}^{\frac{1}{\alpha-\beta}} \frac{1}{t^2} f\left(\beta+\frac{1}{t}\right) dt\ \right]$$

A[3.27] Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα

α) $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx =$

$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\log x \, 2\sqrt{x} \Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-2\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon - 4\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 \right)$

$= -2 \lim_{\varepsilon\to 0+} \sqrt{\varepsilon}\,\log\varepsilon - 4 = -4\Big(\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon \log\varepsilon}_{= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\log\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon} = 0} + 1\Big) = -4$

β) $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\,dx \underset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, t \cos t \, dt$

συγκλίνει, αφού $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ συνεχώς παραγωγίσιμη, φθίνουσα, $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$

(Θ. [3.42]) [υπό συνθήκη αφού $\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \infty$]

11–17

γ) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\log x}{x+1}\,dx \underset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_{\frac{1}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\frac{\log\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+1}\,dt = -\int_{\frac{1}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{t}\,\frac{\log t}{1+t}\,dt$

Με $f(t) = \frac{1}{t}\,\frac{\log t}{1+t}$ και $g(t) = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ έχουμε

$\displaystyle\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{t(1+t)}\log t = \frac{t^2}{t(1+t)}\,\frac{\log t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, αφού $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{t(1+t)} = 1$

και $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{2\sqrt{t}}{t} = 0$ και $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt < \infty$

$\Longrightarrow$ (Ορ. Κριτ. Συγκλ.) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\infty}\frac{1}{t}\,\frac{\log t}{1+t}\,dt$ συγκλίνει και μάλιστα απόλυτα,

άρα και το $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\log x}{x+1}\,dx$ συγκλίνει απόλυτα.

δ) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sin x} \underset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}\,\frac{1}{\sin\frac{1}{t}}\,dt$ απειρίζεται θετικά αφού $\displaystyle\frac{1}{t\sin\frac{1}{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$

(Πορ. Θ. [3.30])

11–18

A [3.28] Να βρεθούν οι τιμές του $p\in\mathbb{R}$ για τις οποίες συγκλίνουν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $$\int_0^1 \frac{dx}{x^p\left(1+\log\frac{1}{x}\right)} \underset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, t^p \frac{1}{1+\log t}\, dt \begin{cases} <\infty, & p<1 \\ =\infty, & p\geq 1 \end{cases},$$

αφού $\int_1^\infty \frac{1}{t^{2-p}} \begin{cases} <\infty & \text{για } 2-p>1 \\ =\infty & \text{για } 2-p\leq 1 \end{cases}$ και $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+\log t} = 1$ (Θ. [3.30])

γ) $$\int_0^1 x^p \sin\frac{1}{x}\, dx \underset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^\infty \frac{1}{t^{p+2}} \sin t\, dt$$ συγκλίνει για $p+2>0$, αποκλίνει για $p+2\leq 0$ (Πορ. Θ. [3.37] και Πρ. [3.41])

Για $p+2>1$ συγκλίνει απόλυτα (Εφ. [1., §3.2] (p-ολοκληρώματα) ή Θ. [3.42](i)) για $p+2\in(0,1)$ υπό συνθήκη (Θ. [3.42](ii)) β) $$\int_{\pi}^{4\pi} \frac{\sin x}{(x-\pi)^p}\,dx \underset{x-\pi=\frac{1}{t}}{=} \int_{\frac{1}{3\pi}}^{\infty} t^{p-2}\sin\left(\pi+\frac{1}{t}\right)dt = \cos\pi\int_{\frac{1}{3\pi}}^{\infty} t^{p-2}\sin\frac{1}{t}\,dt$$

$$= -\int_{\frac{1}{3\pi}}^{\frac{2}{\pi}} t^{p-2}\sin\frac{1}{t}\,dt - \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} t^{p-2}\sin\frac{1}{t}\,dt$$

Το $\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} t^{p-2}\sin\frac{1}{t}\,dt$ συγκλίνει για $-(p-3)>1$, δηλ. για $p<2$,
και αποκλίνει για $-(p-3)\leq 1$, δηλ. για $p\geq 2$

(Οριακό κριτήριο σύγκρισης, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}=1$, p-ολοκλήρωμα)

[§3.8] Γενικευμένα ολοκληρώματα μικτού είδους

Γ. ο. μικτού είδους είναι αυτά στα οποία και το διάστημα ολοκλήρωσης είναι μη φραγμένο και η συνάρτηση είναι μη φραγμένη. Αυτά εξετάζονται διασπώμενα σε ένα πεπερασμένο αριθμό γ.ο. α΄ και β΄ είδους.

Πδ. [3.70] $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$

Το $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει υπό συνθήκη, αφού $\frac{1}{\sqrt{x}}$ φθίνουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ και $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}=\infty$ (θ. [3.42])

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx \underset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\sqrt{t}\cos\frac{1}{t}\,dt$ συγκλίνει απόλυτα, αφού $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\cos\frac{1}{t}=1$ (Πορ. Οριακού Κριτ. Σύγκρισης)

A[3.32] Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

Το δεύτερο γ.ο. (α' είδους) συγκλίνει (απόλυτα) αφού $\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ $\forall x \geq 1$

και $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} < \infty$ (p-ολοκλ. και Κριτ. Σύγκρισης)

$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \underset{x=\frac{1}{t}}{=} -\int_\infty^1 \frac{1}{t^2}\, t \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}\,dt = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \infty$, αφού $\frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{t}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1$

και $\int_1^\infty \frac{1}{t}\,dt = \infty$ (Ορ. Κριτ. Σύγκρισης και p-ολοκλ.)

$\Rightarrow$ Το $\int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ απειρίζεται θετικά

β) $\int_0^\infty \frac{(e^{-x}-1)^2}{x^3}\,dx = \int_0^1 \frac{(e^{-x}-1)^2}{x^3}\,dx + \int_1^\infty \frac{(e^{-x}-1)^2}{x^3}\,dx$

Το δεύτερο γ.ο. (α' είδους) συγκλίνει αφού $(e^{-x}-1)^2 \in [0,1]$ και $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} < \infty$

(Κριτήριο Σύγκρισης και p-ολοκλήρωμα)

Το πρώτο γ.ο. (β' είδους) $\int_0^1 \frac{(e^{-x}-1)^2}{x^3}dx \underset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^\infty \frac{1}{t^2} t^3 (e^{-\frac{1}{t}}-1)^2 dt$

$= \int_1^\infty \frac{1}{t} t^2 (e^{-\frac{1}{t}}-1)^2 dt = \infty$, αφού $t^2(e^{-\frac{1}{t}}-1)^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$

[Νε. Ι, §3.6, 5.: $\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \iff \frac{e^{-x}-1}{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \iff \frac{(e^{-x}-1)^2}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \iff$

$\iff \frac{(e^{-\frac{1}{t}}-1)^2}{(\frac{1}{t})^2} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1 \iff t^2(e^{-\frac{1}{t}}-1)^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$]

και $\int_1^\infty \frac{1}{t} dt = \infty$ (p-ολοκλήρωμα και Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης)

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{(e^{-x}-1)^2}{x^3}dx = \infty$

γ) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p} = \infty \quad \forall p \in \mathbb{R}$ (βλ. επόμενη Α [3.33] με $-p$ αντί για p)

δ) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$. Το δεύτερο γ.ο. (α' είδους) συγκλίνει

(απόλυτα), αφού $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} < \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \quad \forall x \geq 1$ και $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} < \infty$ (Κριτ. Συγκρ. και p-ολοκλ.)

Το πρώτο γ.ο. $\underset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\sqrt{t}\,\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\,dt = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}dt$ συγκλίνει αφού ισούται

με το δεύτερο.

A[3.33] Υπάρχει $p \in \mathbb{R}$ ώστε το γ.ο. $\int_0^\infty x^p\,dx$ να συγκλίνει;

Λ: $\int_0^\infty x^p\,dx = \int_0^1 x^p\,dx + \int_1^\infty x^p\,dx$

Το $\int_1^\infty x^p\,dx$ συγκλίνει (απόλυτα) για $-p>1$, δηλ. $p<-1$, και απειρίζεται θετικά για $p \geq -1$ (Εφ. [1., §3.2] (p-ολοκλήρωμα))

Το $\int_0^1 x^p\,dx$ συγκλίνει (απόλυτα) για $-p<1$, δηλ. $p>-1$, και απειρίζεται θετικά για $p \leq -1$ (A[3.23α)] με $\alpha=0$, $\beta=1$)

$\Rightarrow$ Δεν υπάρχει $p \in \mathbb{R}$ για το οποίο να συγκλίνει το $\int_0^\infty x^p dx$.

A [3.34] $\int_0^\infty \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\beta}\,dx$ συγκλίνει μόνο για $\beta \in (1-|\alpha|, 1+|\alpha|)$, $\alpha \neq 0$

Απόδειξη :

Από την A [3.33] προκύπτει ότι για $\alpha = 0$ το $\sin 1 \int_0^\infty x^{-\beta}\,dx$ δεν συγκλίνει για κανένα $\beta \in \mathbb{R}$.

Έστω $\alpha \neq 0$. Θέτοντας $y = x^\alpha \Rightarrow dy = \alpha x^{\alpha-1}\,dx$, $x^{\beta+\alpha-1} = y^{\frac{\beta+\alpha-1}{\alpha}}$

$$x^\alpha \xrightarrow[x\to\infty]{} \begin{cases} \infty, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}, \quad x^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ \infty, & \alpha < 0 \end{cases}$$ και συνεπώς

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\beta}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \frac{\sin(x^\alpha)}{x^{\beta+\alpha-1}}\,\alpha x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{|\alpha|}\int_0^\infty \frac{\sin y}{y^\gamma}\,dy$$

όπου $\gamma = \frac{\beta-1}{\alpha} + 1$.

Το $\int_1^\infty \frac{\sin y}{y^\gamma}\,dy$ συγκλίνει για $\gamma > 0$ (Θ. [3.42] ή Πορ. Θ. [3.37]) ένω αποκλίνει για $\gamma=0$, και άρα δεν συγκλίνει ούτε για $\gamma<0$, αφού αν συνέκλινε, απ' το Κριτήριο του Dirichlet για $f(y)=\frac{\sin y}{y^\gamma}$, $g(y)=y^\gamma$, θα είχαμε ότι συγκλίνει για $\gamma=0$ (βλ. Πε. [3.41]).

Το $\int_0^1 \frac{\sin y}{y^\gamma}\,dy \underset{y=\frac{1}{t}}{=} \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, t^\gamma \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_1^\infty \frac{1}{t^{3-\gamma}}\, \frac{\sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\, dt$

συγκλίνει απόλυτα για $3-\gamma>1$ και απειρίζεται θετικά για $3-\gamma\leq 1$, αφού $\frac{\sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$ και $\int_1^\infty \frac{1}{t^{3-\gamma}}\,dt \begin{cases} <\infty & \text{για } 3-\gamma>1 \\ =\infty & \text{για } 3-\gamma\leq 1 \end{cases}$

(Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης (Θ. [3.30]) και Εφ. [1., §3.2] (p-ολοκλήρωμα))

Συνεπώς το εξεταζόμενο γ.ο. συγκλίνει μόνο για $\gamma\in(0,2)$, δηλ. για $\frac{\beta-1}{\alpha}\in(-1,1)$, δηλ. για $\beta-1\in(-|\alpha|,|\alpha|)$, δηλ. για $\beta\in(1-|\alpha|,1+|\alpha|)$