[§1.3] Μέθοδοι ολοκλήρωσης – Β΄: Μέθοδος παραγοντικής ολοκλήρωσης

Notiztitel 17.03.2012

Θ. [1.28] $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες, $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα,

$$\exists \int f'g \, dx \Rightarrow \exists \int fg' dx = fg - \int f'g \, dx$$

Απόδειξη:

$$\exists \int f'g \, dx \Leftrightarrow \exists H : \Delta \to \mathbb{R} \text{ με } H' = f'g$$

$$\Rightarrow \exists K := fg - H : \Delta \to \mathbb{R} \text{ με } K' = (fg - H)' \underset{\text{αλγ. παραγ. συν.}}{=} f'g + fg' - H' = fg'$$

$$\Leftrightarrow \exists \int fg' dx = \{K + c : c \in \mathbb{R}\} = \{fg - H + c : c \in \mathbb{R}\} =$$

$$= fg - \{H + c : c \in \mathbb{R}\} = fg - \int f'g \, dx \qquad \square$$

[Πρ. [1.29] : Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\frac{df}{dx} = f' \Leftrightarrow df = f' dx$
η παραγοντική ολοκλήρωση μπορεί να γραφεί και ως

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df$$]

Πδ [1.30] : $\int \underbrace{x}_{=f}\underbrace{e^x}_{=g'} dx = xe^x - \int \underbrace{1}_{=f'}\cdot\underbrace{e^x}_{=g} dx = xe^x - e^x + c$

Πδ [1.31] : $\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx =$

$= x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x - \int 1(-\cos x)\,dx \right) =$

$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

Πτ. [1.32]: Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f\,dx$ εκφράζει μια παράγουσα F, δηλ. $F' = f$, <u>συν μια οποιαδήποτε σταθερά</u> την οποία πρέπει πάντα να προσθέτουμε όταν εκφράζουμε το $\int f\,dx$ μέσω μιας συγκεκριμένης παράγουσας: $\int f\,dx = F + c$.

Έτσι ισχύουν υπολογισμοί του τύπου (Πδ. [1.33])

$$\underbrace{\int \frac{1}{x}\,dx}_{=\{F+c\,:\,c\in\mathbb{R}\}\ (=:\,F+c)} = x\,\frac{1}{x} - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = 1 + \underbrace{\int \frac{1}{x}\,dx}_{=\{F+c-1\,:\,c\in\mathbb{R}\}} \quad (= F+c)$$

[Στην συγκεκριμένη περίπτωση η παραγοντική ολοκλήρωση δεν μας δίνει αποτέλεσμα, δηλ. κάποια παράγουσα.]

ΠΔ [1.35]

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x - \int e^x(-\cos x)\, dx$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

ΠΔ [1.36] (πρβ. και ΠΔ [1.16], Περίπτωση 1 της Μέθ. Αντικατ.)

$$\int \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \int x \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}\, dx = x\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} dx$$

$$= x\sqrt{\alpha^2 - x^2} - \int \frac{-\alpha^2 + \alpha^2 - x^2}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} dx = x\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \alpha^2 \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$$

$$- \int \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx \Rightarrow \int \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx \underset{\alpha > 0}{=} \frac{1}{2}\left(x\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \alpha^2 \int \frac{d\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{\alpha^2 - x^2} + \alpha^2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) + c$$

A [1.10 β] $\displaystyle\int \log x \, dx \underset{x>0}{=} x \log x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x(\log x - 1) + c$

A [1.11 β] $\displaystyle\int \sqrt{A + x^2}\, dx$, $A \in \mathbb{R}$. Αν $A = 0$, $\displaystyle\int \sqrt{x^2}\, dx = \int |x| \, dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c, & x>0 \\ -\frac{x^2}{2} + c, & x<0 \end{cases}$

αν $A = -\alpha^2 < 0$, πβ. και Περίπτ. 3, Μέθ. Αντικ., αν $A = \alpha^2 > 0$, πβ. και Περίπτ. 2, Μέθ. Αντικ. Με παραγοντική ολοκλήρωση $(A \neq 0)$

$$\int \sqrt{A+x^2}\, dx = x\sqrt{A+x^2} - \int x \, \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{A+x^2}} \, dx = x\sqrt{A+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{A+x^2}} \, dx$$

$$= x\sqrt{A+x^2} + A \int \frac{dx}{\sqrt{A+x^2}} - \int \sqrt{A+x^2}\, dx$$

με $$\int \frac{dx}{\sqrt{A+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\pm |A| + x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{|A|}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{|A|}}\right)^2 \pm 1}} = \log \left| \frac{x}{\sqrt{|A|}} + \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{|A|}}\right)^2 \pm 1} \right| + c$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{A+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{A+x^2} + A \log \left| x + \sqrt{A+x^2} \right| \right) + c$$

σε διαστήματα του $\{ x \in \mathbb{R} : x^2 > -A \}$

Με παραγοντική ολοκλήρωση υπολογίζονται κυρίως ολοκληρώματα που είναι γινόμενα

πολυωνυμικής × εκθετική συνάρτηση (Α΄)

πολυωνυμικής × τριγωνομετρική (Β΄)

εκθετικής × τριγωνομετρική (Γ΄)

πολυωνυμικής × εκθετική × τριγωνομετρική (Δ΄)

εκθετικής × τριγωνομετρική × τριγωνομετρική (Ε΄)

Α΄ : $\displaystyle\int P(x)\, e^{\alpha x}\, dx \underset{\alpha\neq 0}{=} \frac{1}{\alpha} P(x)\, e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int P'(x)\, e^{\alpha x}\, dx$

Β΄ : $\displaystyle\int P(x)\cos(\alpha x+\beta)\, dx \underset{\alpha\neq 0}{=} \frac{1}{\alpha} P(x)\sin(\alpha x+\beta) - \frac{1}{\alpha}\int P'(x)\sin(\alpha x+\beta)\, dx$

$$\int P(x)\sin(\alpha x+\beta)\, dx \underset{\alpha\neq 0}{=} -\frac{1}{\alpha} P(x)\cos(\alpha x+\beta) + \frac{1}{\alpha}\int P'(x)\cos(\alpha x+\beta)\, dx$$

Γ': $\displaystyle\int e^{kx}\sin(\alpha x+\beta)\,dx \underset{k\neq 0}{=} \frac{1}{k} e^{kx}\sin(\alpha x+\beta) - \frac{1}{k}\int e^{kx}\alpha\cos(\alpha x+\beta)\,dx$

$$= \frac{1}{k} e^{kx}\sin(\alpha x+\beta) - \frac{\alpha}{k^2} e^{kx}\cos(\alpha x+\beta) + \frac{\alpha}{k^2}\int e^{kx}\left(-\alpha\sin(\alpha x+\beta)\right)dx$$

$$\Rightarrow \int e^{kx}\sin(\alpha x+\beta)\,dx = \frac{1}{1+\frac{\alpha^2}{k^2}} e^{kx}\left(\frac{1}{k}\sin(\alpha x+\beta) - \frac{\alpha}{k^2}\cos(\alpha x+\beta)\right) + c$$

$$= \frac{e^{kx}}{k^2+\alpha^2}\left(k\sin(\alpha x+\beta) - \alpha\cos(\alpha x+\beta)\right) + c$$

$$\int e^{kx}\cos(\alpha x+\beta)\,dx \underset{k\neq 0}{=} \frac{1}{k} e^{kx}\cos(\alpha x+\beta) - \frac{1}{k}\int e^{kx}\left(-\alpha\sin(\alpha x+\beta)\right)dx$$

$$= \frac{1}{k} e^{kx}\cos(\alpha x+\beta) + \frac{\alpha}{k^2} e^{kx}\sin(\alpha x+\beta) - \frac{\alpha}{k^2}\int e^{kx}\alpha\cos(\alpha x+\beta)\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^{kx}\cos(\alpha x+\beta)\,dx = \frac{e^{kx}}{k^2+\alpha^2}\left(k\cos(\alpha x+\beta) + \alpha\sin(\alpha x+\beta)\right) + c$$

Δ′: $\int P(x) \underbrace{e^{kx} \sin(\alpha x+\beta)}_{=f} dx = PF - \int P' F dx$,

$\int P(x) \underbrace{e^{kx} \cos(\alpha x+\beta)}_{=g} dx = PG - \int P' G dx$

όπου οι F, G με $F' = f$, $G' = g$ δίνονται στο Γ′

Ε′: $\int e^{kx} \sin(\alpha x+\beta) \cos(\gamma x+\delta) dx$

$\int e^{kx} \sin(\alpha x+\beta) \sin(\gamma x+\delta) dx$

$\int e^{kx} \cos(\alpha x+\beta) \cos(\gamma x+\delta) dx$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$, $2\sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$, $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ ανάγονται σε δύο ολοκληρώματα της μορφής Γ′.

$$\Big[\ \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = \cos\cancel{\alpha}\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\cos\cancel{\alpha}\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cancel{\sin\beta\cos\alpha}+\sin\alpha\cos\beta-\cancel{\sin\beta\cos\alpha},$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\cancel{\sin\alpha\sin\beta}+\cos\alpha\cos\beta+\cancel{\sin\alpha\sin\beta}\ \Big]$$

A [1.13 β]

$$\int x e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = x\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)$$
$$-\int\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)\,dx$$
$$=\left(x-\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\right)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$$
$$=\left(x-\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\right)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)$$
$$-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)+C$$
$$=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left[\left(\alpha x-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)\cos\beta x+\left(\beta x-\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\sin\beta x\right]+C$$

ΣΤ' : $\int f(x)\log\varphi(x)\,dx = F(x)\log\varphi(x) - \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}F(x)\,dx$

$$\int f(x)\operatorname{Arcsin}\varphi(x)\,dx = F(x)\operatorname{Arcsin}\varphi(x) - \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}F(x)\,dx$$

$$\int f(x)\operatorname{Arccos}\varphi(x)\,dx = F(x)\operatorname{Arccos}\varphi(x) + \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}F(x)\,dx$$

$$\int f(x)\operatorname{Arctg}\varphi(x)\,dx = F(x)\operatorname{Arctg}\varphi(x) - \int \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}F(x)\,dx$$

$$\int f(x)\operatorname{Arcctg}\varphi(x)\,dx = F(x)\operatorname{Arcctg}\varphi(x) + \int \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}F(x)\,dx$$

όπου $F' = f$.

12–1/11

A[1.14δ] $\displaystyle\int \frac{x \,\mathrm{Arcsin}\, x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$: Αφού $\displaystyle\int \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$

$$\underset{y=1-x^2}{=} -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{y^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{y^{1/2}} + C = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} + C$$

Έχουμε

$$\int \frac{x \,\mathrm{Arcsin}\, x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{\mathrm{Arcsin}\, x}{(1-x^2)^{1/2}} - \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{\mathrm{Arcsin}\, x}{(1-x^2)^{1/2}} - \mathrm{Arctgh}\, x + c$$

$$= \frac{\mathrm{Arcsin}\, x}{(1-x^2)^{1/2}} - \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + c, \quad x \in (-1,1)$$

$$Z': \int \frac{f(x)}{\varphi^2(x)}\,dx = \int\left(-\frac{f(x)}{\varphi'(x)}\right)\left(-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\right)dx = \int\left(-\frac{f(x)}{\varphi'(x)}\right)\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)'dx$$

$$= -\frac{f(x)}{\varphi'(x)\,\varphi(x)} + \int \frac{f'(x)\varphi'(x) - f(x)\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^2\,\varphi(x)}\,dx$$

$$A\,[1.15\delta]\ \int \frac{dx}{(1+x\operatorname{tg}x)^2} = \int \frac{dx}{\left(\frac{\cos x}{\cos x} + x\,\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \int \frac{\cos^2 x}{(\cos x + x\sin x)^2}\,dx$$

$$\varphi(x) = \cos x + x\sin x \Rightarrow \left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)' = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = -\frac{-\sin x + \sin x + x\cos x}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

$$= -\frac{x\cos x}{(\cos x + x\sin x)^2} \Rightarrow \int \frac{\cos^2 x}{(\cos x + x\sin x)^2}\,dx = -\int \frac{\cos x}{x}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)'dx$$

$$= -\frac{\cos x}{x}\,\frac{1}{\varphi(x)} + \int \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}\,\frac{1}{\varphi(x)}\,dx = -\frac{\cos x}{x\varphi(x)} - \int\frac{dx}{x^2}$$

$$= -\frac{\cos x}{x\,\varphi(x)} + \frac{1}{x} + C = \frac{-\cos x + \varphi(x)}{x\,\varphi(x)} + C = \frac{\sin x}{\cos x + x\sin x} + C$$

12-1/13

[§1.4] Αναγωγικοί τύποι

Εκφράζουν το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int F(x, f^\nu(x))\,dx$, $\nu \in \mathbb{N}$, μέσω των ολοκληρωμάτων I_k, $k=1,\dots,\nu-1$, και ειδικότερα, στις πιο απλές περιπτώσεις, μέσω του $I_{\nu-1}$, ούτως ώστε γνωρίζοντας και το I_1, η ακολουθία (I_ν) να είναι γνωστή.

Πδ [1.50] $\quad I_\nu = \displaystyle\int \frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^\nu}$, $\alpha > 0$.

$$I_1 = \int \frac{dx}{\alpha^2+x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{d\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x}{\alpha} + c$$

$$I_\nu = \int \frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^\nu} = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{\alpha^2+x^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^\nu}\,dx = \frac{1}{\alpha^2} I_{\nu-1} - \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{x^2}{(\alpha^2+x^2)^\nu}\,dx$$

2-1/14

$$\mu\varepsilon \quad \int \frac{x^2}{(\alpha^2+x^2)^\nu}\,dx = \frac{1}{2(1-\nu)} \int x \,(1-\nu)\frac{2x}{(\alpha^2+x^2)^\nu}\,dx$$

$$= \frac{1}{2(1-\nu)}\left(\frac{x}{(\alpha^2+x^2)^{\nu-1}} - \int \frac{1}{(\alpha^2+x^2)^{\nu-1}}\,dx\right) = \frac{1}{2(1-\nu)}\,\frac{x}{(\alpha^2+x^2)^{\nu-1}} - \frac{1}{2(1-\nu)} I_{\nu-1}$$

$$\Longrightarrow \quad I_\nu = \frac{1}{\alpha^2}\left(1-\frac{1}{2(\nu-1)}\right) I_{\nu-1} + \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{1}{2(\nu-1)}\,\frac{x}{(\alpha^2+x^2)^{\nu-1}}, \quad \nu \geqslant 2$$

$$\text{π.χ.} \quad I_2 = \frac{1}{2\alpha^2} I_1 + \frac{1}{2\alpha^2}\,\frac{x}{\alpha^2+x^2} = \frac{1}{2\alpha^3}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\,\frac{x}{\alpha^2+x^2} + C$$

A [1.17 γ] $\quad \Gamma_\nu = \int \frac{x^\nu}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\,dx, \quad \alpha>0$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\,dx \underset{y=x^2+\alpha^2}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{y}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+\alpha^2} + C$$

$$\Gamma_\nu = \int \frac{x^\nu}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\,dx = \int x^{\nu-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\,dx = x^{\nu-1}\sqrt{x^2+\alpha^2} - \int (\nu-1)x^{\nu-2}\frac{x^2+\alpha^2}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad \nu\,\Gamma_\nu = x^{\nu-1}\sqrt{x^2+\alpha^2} - (\nu-1)\,\alpha^2\,\Gamma_{\nu-2}, \quad \nu \geqslant 2, \text{ όπου}$$

$$\Gamma_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+1}} = \text{Arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right) + c \, .$$

[Ξεκινώντας από το Γ_0 αποκτούμε την υπακολουθία $(\Gamma_{2\kappa})_{\kappa\in\mathbb{N}}$,
ξεκινώντας από το Γ_1 αποκτούμε την υπακολουθία $(\Gamma_{2\kappa-1})_{\kappa\in\mathbb{N}}$]

A [1.18 δ] $\displaystyle\int (\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}} dx = \frac{x}{2(\nu+1)}(\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}} + \frac{2\nu+1}{2(\nu+1)}\alpha^2 \int (\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx$:

$$\int (\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}} dx = x(\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}} - \frac{2\nu+1}{2}\int 2x^2(\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx$$

$$= x(\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}} - (2\nu+1)\int(\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}} dx + (2\nu+1)\alpha^2\int(\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx$$

$$\Rightarrow \int (\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}} dx = \frac{x(\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}}}{2(\nu+1)} + \frac{2\nu+1}{2(\nu+1)}\alpha^2 \int (\alpha^2+x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx$$