[§1.5] Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

$$\int R(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{\beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \dots + \beta_m}{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n}\,dx,$$

$\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$, $\alpha_0, \beta_0 \neq 0$, $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$

Το $\int R(x)\,dx$ υπάρχει σε κάθε ανοικτό διάστημα με άκρα τις πραγματικές ρίζες του $Q(x)$.

Αν $m \geq n$ υπάρχουν πολυώνυμα P_2 με βαθμό $< n$ και P_1 έτσι ώστε

$$P(x) = P_1(x)\,Q(x) + P_2(x) \implies \int R(x)\,dx = \int P_1(x)\,dx + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)}\,dx$$

Το $\int P_1(x)\,dx$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα της ολοκλήρωσης (Θ. [1.10]) και το στοιχειώδες ολοκλ. $\int x^\nu dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c$

Αφού βαθμός του $P_2 < n =$ βαθμός του Q και σύμφωνα με το Θεμ. Θεωρ.

της Άλγεβρας κάθε πολυώνυμο έχει τόσες πραγματικές ή μη ρίζες όσες και ο βαθμός του (ενδεχομένως πολλαπλές), αποδεικνύεται ότι

<u>το $\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$ αναλύεται σε απλά κλάσματα της μορφής</u>

$$\frac{P_2(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{A_{ik}}{(x-\rho_i)^k} + \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{s_j} \frac{B_{jk}x + C_{jk}}{(x^2+2p_jx+q_j)^k} \qquad (*)$$

με $A_{ik}, B_{jk}, C_{jk} \in \mathbb{R}$, $p_j^2 < q_j$, ρ_i πραγματικές ρίζες του Q με πολλαπλότητες r_i, $\sum_{i=1}^{\mu} r_i + 2\sum_{j=1}^{\nu} s_j = n$, $\mu, \nu \geq 0$.

[Βρίσκουμε δηλαδή τις πραγματικές ρίζες ρ_i του Q και τις πολλαπλότητές τους r_i και τα δευτεροβάθμια πολυώνυμα $x^2+2p_jx+q_j$ που δεν έχουν πραγματικές ρίζες και τις πολλαπλότητές τους και αναλύουμε το $\frac{P_2}{Q}$ όπως στο $(*)$]

Προσδιορίζουμε τους συντελεστές A_{ik}, B_{jk}, C_{jk} απαλείφοντας τους παρονομαστές στην ανάλυση $(*)$, δηλ. γράφοντας

$$P_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{A_{ik}}{(x-\rho_i)^k} + \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{s_j} \frac{B_{jk}x + C_{jk}}{(x^2+2p_jx+q_j)^k} \right) Q(x)$$

$$= \left(\quad \cdots \quad \right) \alpha_0 \prod_{i=1}^{\mu} (x-\rho_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{\nu} (x^2+2p_jx+q_j)^{s_j}, \qquad (**)$$

και έπειτα είτε εξισώνοντας τους συντελεστές ίδιων δυνάμεων του x είτε αντικαθιστώντας το x στο $(**)$ με ειδικές τιμές και κυρίως τις ρίζες του παρονομαστή επιλύουμε το γραμμικό σύστημα που προκύπτει για τους συντελεστές A_{ik}, B_{jk}, C_{jk}.

[Πτ. [1.54] Ειδική περίπτωση: Το Q έχει n (= βαθμός του Q)

πραγματικές και απλές ρίζες: $Q(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n)$,

$\rho_i \neq \rho_j$ για $i \neq j$, $i,j = 1,\dots,n$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_2(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\rho_1} + \frac{A_2}{x-\rho_2} + \dots + \frac{A_n}{x-\rho_n}$$

$$\Rightarrow \quad P_2(x) = A_1(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n) + A_2(x-\rho_1)(x-\rho_3)\cdots(x-\rho_n)$$

$$+ \dots + A_n(x-\rho_1)\cdots(x-\rho_{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad P_2(\rho_1) = A_1(\rho_1-\rho_2)\cdots(\rho_1-\rho_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad A_1 = \frac{P_2(\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)\cdots(\rho_1-\rho_n)} \left[= \frac{P_2(\rho_1)}{Q'(\rho_1)}\right]$$

και γενικότερα

$$A_k = \frac{P_2(\rho_k)}{(\rho_k-\rho_1)\cdots(\rho_k-\rho_{k-1})(\rho_k-\rho_{k+1})\cdots(\rho_k-\rho_n)} = \frac{P_2(\rho_k)}{Q'(\rho_k)}, \quad k=1,\dots,n$$

]

12-2/5

Τα απλά κλάσματα στην ανάλυση (*) υπολογίζονται ως εξής:

$$\int \frac{dx}{(x-\rho)^k} = \begin{cases} \log|x-\rho| & \text{για } k=1 \\ \frac{1}{1-k}\,\frac{1}{(x-\rho)^{k-1}} & \text{για } k>1 \end{cases} \quad \text{και } x>\rho \text{ ή } x<\rho,$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^k}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+2p}{(x^2+2px+q)^k}\,dx + (C-B)\int \frac{dx}{(x^2+2px+q)^k}\,dx$$

$$\text{με } \int \frac{2x+2p}{(x^2+2px+q)^k}\,dx \underset{\substack{y=x^2+2px+q \\ dy=(2x+2p)dx}}{=} \int \frac{dy}{y^k} = \begin{cases} \log|y| & , k=1 \\ \frac{1}{1-k}\,y^{1-k} & , k\geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \log|x^2+2px+q| & , \quad k=1 \\ \frac{1}{1-k}\,\frac{1}{(x^2+2px+q)^{k-1}} & , \quad k\geq 2 \end{cases} \qquad \text{και}$$

$$J_k = \int \frac{dx}{(x^2+2px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left((x+p)^2+q-p^2\right)^k} \underset{\substack{q-p^2=:\alpha^2>0 \\ y=x+p}}{=} \int \frac{dy}{(y^2+\alpha^2)^k}$$

$$= \frac{1}{2(k-1)\alpha^2}\frac{y}{(\alpha^2+y^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)}\frac{1}{\alpha^2}J_{k-1}$$

ΠΔ [1.50] (Σημ. 2-1/13,14)

$$= \frac{1}{2(k-1)(q-p^2)}\frac{x+p}{(x^2+2px+q)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)}\frac{1}{q-p^2}J_{k-1}, \quad k\geq 2$$

όπου $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+2px+q} \underset{\substack{q-p^2=:\alpha^2>0,\\ y=x+p}}{=} \int \frac{dy}{y^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{d\left(\frac{y}{\alpha}\right)}{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2+1} =$

$$= \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{\alpha}\right) + c = \frac{1}{\sqrt{q-p^2}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + c, \quad x\in\mathbb{R}$$

Με τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα οποιασδήποτε ρητής συνάρτησης. Υπάρχουν φυσικά και ειδικές περιπτώσεις που είναι πιο απλές, π.χ. αν $P(x) = Q'(x)$, τότε

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{Q'(x)}{Q(x)}dx \underset{\substack{y=Q(x)\\ dy=Q'(x)dx}}{=} \int \frac{dy}{y} = \log|y| + c = \log|Q(x)| + c,$$

12-2-17

ή αν $P(x)$ = περιττή συνάρτηση $= \tilde{P}(x^2)\,x$ και $Q(x)$ = άρτια συνάρτηση $= \tilde{Q}(x^2)$, τότε $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\tilde{P}(x^2)}{\tilde{Q}(x^2)}\,2x\,dx \underset{y=x^2}{=} \frac{1}{2}\int \frac{\tilde{P}(y)}{\tilde{Q}(y)}\,dy$, π.χ.

Πδ [1.61]
$$\int \frac{x^3+3x}{(x^2-1)(x^2+1)^2}\,dx \underset{\substack{y=x^2\\ dy=2x}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{y+3}{(y-1)(y+1)^2}\,dy$$

Ανάλυση του $\dfrac{y+3}{(y-1)(y+1)^2}$ σε απλά κλάσματα:
$$\frac{y+3}{(y-1)(y+1)^2} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1} + \frac{\Gamma}{(y+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad y+3 = A(y+1)^2 + B(y-1)(y+1) + \Gamma(y-1)$$

Προσδιορισμός των συντελεστών A, B, Γ με αντικατάσταση στο y των ριζών του παρονομαστή και $y=0$:

$y=1$: $\quad 4 = A4 \Leftrightarrow A=1$

$y=-1$: $\quad 2 = \Gamma(-2) \Leftrightarrow \Gamma = -1$

$y=0$: $\quad 3 = 1 - B + 1 \Leftrightarrow B = -1$

Συνεπώς $\dfrac{y+3}{(y-1)(y+1)^2} = \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} - \dfrac{1}{(y+1)^2}$ και άρα

$$\frac{1}{2}\int \frac{y+3}{(y-1)(y+1)^2}\,dy = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{dy}{(y+1)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log|y-1| - \log|y+1| - \frac{(y+1)^{-1}}{-1}\right) + c = \frac{1}{2}\left(\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + \frac{1}{y+1}\right) + c$$

οπότε $$\int \frac{x^3+3x}{(x^2-1)(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\log\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + \frac{1}{x^2+1}\right) + c$$

A [1.19 στ] $\displaystyle\int \frac{9-7x}{x^2+12x+38}\,dx$

$x^2+12x+38 = (x+6)^2+2 \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ο παρονομαστής δεν έχει πραγματικές ρίζες

$$\int \frac{-7x+9}{x^2+12x+38}\,dx = -\frac{7}{2}\int \frac{2x+12}{x^2+12x+38}\,dx + 51\int \frac{dx}{x^2+12x+38}$$

$$\underset{\substack{y=x^2+12x+38\\ dy=(2x+12)dx}}{=} -\frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} + 51\int \frac{dx}{(x+6)^2+2} = -\frac{7}{2}\log\left(x^2+12x+38\right)$$

$$+51\,\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \underset{z=\frac{x+6}{\sqrt{2}}}{=} -\frac{7}{2}\log\left(x^2+12x+38\right) + \frac{51}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z^2+1}$$

$$= -\frac{7}{2}\log\left(x^2+12x+38\right) + \frac{51}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}}\right) + c$$

2-2/10

A [1.19 ζ] $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx$

Αφού $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ο παρονομαστής δεν έχει πραγματικές ρίζες

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(x^2+4x+5\right) - \text{Arctg}\,(x+2) + c$$

A [1.20 β] $\int \frac{x^3}{(x-\alpha)^2(x-\beta)}\,dx \quad (\alpha, \beta \neq 0,\ \alpha \neq \beta)$

$$(x-\alpha)^2(x-\beta) = (x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x-\beta) = x^3-2\alpha x^2+\alpha^2 x-\beta x^2+2\alpha\beta x-\alpha^2\beta$$

$$= x^3-(2\alpha+\beta)x^2+\alpha(\alpha+2\beta)x-\alpha^2\beta$$

12-2/11

$$\Rightarrow \int \frac{x^3}{(x-\alpha)^2(x-\beta)}\,dx = x + \int \frac{(2\alpha+\beta)x^2 - \alpha(\alpha+2\beta)x + \alpha^2\beta}{(x-\alpha)^2(x-\beta)}\,dx$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα για $\alpha \neq \beta$:

$$\frac{(2\alpha+\beta)x^2 - \alpha(\alpha+2\beta)\,x + \alpha^2\beta}{(x-\alpha)^2(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{\Gamma}{x-\beta}$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha+\beta)x^2 - \alpha(\alpha+2\beta)x + \alpha^2\beta = A(x-\alpha)(x-\beta) + B(x-\beta) + \Gamma(x-\alpha)^2$$

Προσδιορισμός των A, B, Γ με αντικατάσταση $x=\alpha, \beta, 0$:

$$x=\alpha:\quad (2\alpha+\beta)\alpha^2 - \alpha^2(\alpha+2\beta) + \alpha^2\beta = \alpha^2(2\alpha+\beta-\alpha-2\beta+\beta) = \alpha^3$$

$$= B(\alpha-\beta) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\alpha^3}{\alpha-\beta}$$

$$x=\beta:\quad (2\alpha+\beta)\beta^2 - \alpha\beta(\alpha+2\beta) + \alpha^2\beta = 2\alpha\beta^2 + \beta^3 - \alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta$$

$$= \beta^3 = \Gamma(\beta-\alpha)^2 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{\beta^3}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$x=0: \quad \alpha^2\beta = A\alpha\beta - B\beta + \Gamma\alpha^2 \iff A\alpha\beta = \alpha^2\beta + \frac{\alpha^3\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\beta^3\alpha^2}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$\iff A = \alpha + \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta} - \frac{\beta^2\alpha}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{\alpha(\alpha-\beta)^2 + \alpha^2(\alpha-\beta) - \beta^2\alpha}{(\alpha-\beta)^2}$$

2-2/12

$$= \frac{\alpha\left[\alpha^2 \cancel{+\beta^2} - 2\alpha\beta + \alpha^2 - \alpha\beta \cancel{-\beta^2}\right]}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{\alpha^2(2\alpha-3\beta)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3}{(x-\alpha)^2(x-\beta)}\,dx = x + A\ln|x-\alpha| - B\frac{1}{x-\alpha} + \Gamma\ln|x-\beta| + c$$

$$= x + \frac{\alpha^2(2\alpha-3\beta)}{(\alpha-\beta)^2}\ln|x-\alpha| - \frac{\alpha^3}{\alpha-\beta}\,\frac{1}{x-\alpha} + \frac{\beta^3}{(\alpha-\beta)^2}\ln|x-\beta| + c$$

$$\left[\ \alpha=0: \quad \int \frac{x^3}{x^2(x-\beta)}\,dx = \int \frac{x}{x-\beta}\,dx = \int \frac{x-\beta}{x-\beta}\,dx + \beta\int\frac{dx}{x-\beta}\right.$$

$$= x + \beta\log|x-\beta| + c$$

$$\beta=0: \int \frac{x^3}{(x-\alpha)^2 x}\,dx = \int \frac{x^2}{(x-\alpha)^2}\,dx = \int \frac{(x-\alpha)^2 - \alpha^2 + 2\alpha x}{(x-\alpha)^2}\,dx$$

$$= x - \alpha^2 \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2} + 2\alpha \int \frac{x}{(x-\alpha)^2} dx = x + \alpha^2 \frac{1}{x-\alpha}$$

$$+ \alpha \int \frac{2x-2\alpha}{(x-\alpha)^2} dx + 2\alpha^2 \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2} = x - \frac{\alpha^2}{x-\alpha} + \alpha \log\left[(x-\alpha)^2\right] + c$$

$\alpha=\beta\neq 0$:
$$\int \frac{x^3}{(x-\alpha)^3} dx = x + \int \frac{3x^2\alpha - 3x\alpha^2 + \alpha^3}{(x-\alpha)^3} dx$$

$$\boxed{\left[(x-\alpha)^3 = x^3 - 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 - \alpha^3\right]}$$

$$= x + \alpha \int \frac{3x^2 - 3x\alpha + \alpha^2}{(x-\alpha)^3} dx$$

$$= x + \alpha \int \frac{3x^2 - 6\alpha x + 3\alpha^2}{(x-\alpha)^3} dx + \alpha \int \frac{3\alpha x - 2\alpha^2}{(x-\alpha)^3} dx$$

$$= x + \alpha \ln\left|(x-\alpha)^3\right| + 3\alpha^2 \left(\frac{x}{-2(x-\alpha)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2} \right) - 2\alpha^3 \frac{1}{-2(x-\alpha)^2}$$

$$= x + \alpha \ln\left|(x-\alpha)^3\right| + 3\alpha^2 \left(\frac{x}{-2(x-\alpha)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-\alpha} \right) + \frac{\alpha^3}{(x-\alpha)^2} \Big]$$

A[1.20ζ] $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$:

$$x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = (x^2+1)^2-x^2 = (x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

$$=\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα: $\displaystyle\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{\Gamma x+\Delta}{x^2+x+1}$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 = (Ax+B)(x^2+x+1) + (\Gamma x+\Delta)(x^2-x+1)$$

$$= (A+\Gamma)x^3 + (A+B-\Gamma+\Delta)x^2 + (A+B+\Gamma-\Delta)x + (B+\Delta)$$

$$\Longrightarrow \quad A=-\Gamma, \quad B = 2\Gamma-\Delta, \quad B=\Delta, \quad \Delta=\frac{1}{2} \Longrightarrow B=\frac{1}{2}, \quad \Gamma=\frac{1}{2}, \quad A=-\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{-x+1}{x^2-x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{4}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= -\frac{1}{4}\log\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{4}\log\left|x^2+x+1\right| + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

όπου $\displaystyle \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x\pm\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \underset{y=\frac{2x}{\sqrt{3}}\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}{=} \frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{dy}{y^2+1} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Longrightarrow \int\frac{dx}{x^4+x^2+1} = \log\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

A [1.20η] $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx$

$$x^4-x^2+1 = x^4+2x^2+1-3x^2 = (x^2+1)^2-3x^2$$

$$= \left(x^2+1+\sqrt{3}x\right)\left(x^2+1-\sqrt{3}x\right) = \left(\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)\left(\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{\Gamma x+\Delta}{x^2-\sqrt{3}x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 = (Ax+B)(x^2-\sqrt{3}x+1) + (\Gamma x+\Delta)(x^2+\sqrt{3}x+1)$$

$$= (A+\Gamma)x^3 + \left(-\sqrt{3}A+B+\sqrt{3}\Gamma+\Delta\right)x^2$$

$$+ \left(A-\sqrt{3}B+\Gamma+\sqrt{3}\Delta\right)x + (B+\Delta)$$

$$\Rightarrow A=-\Gamma, \quad B=\Delta=\frac{1}{2}, \quad 2\sqrt{3}\Gamma+1=1 \Leftrightarrow \Gamma=0$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{3}x+1}, \text{ όπου}$$

2-2/17

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\pm\sqrt{3}x+1} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} = 2\int\frac{dx}{(2x\pm\sqrt{3})^2+1} = \mathrm{Arctg}\,(2x\pm\sqrt{3})+c$$

$$\Rightarrow \int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx = \mathrm{Arctg}\,(2x+\sqrt{3}) + \mathrm{Arctg}\,(2x-\sqrt{3}) + c$$

με (βλ. [Ne. I, A.4.44α)]): $\mathrm{Arctg}\,(2x+\sqrt{3})+\mathrm{Arctg}\,(2x-\sqrt{3}) =$

$$= \mathrm{Arctg}\,\frac{2x+\sqrt{3}+2x-\sqrt{3}}{1-(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})} = \mathrm{Arctg}\,\frac{4x}{1-(4x^2-3)} = \mathrm{Arctg}\,\frac{x}{1-x^2}$$

[Προφανώς η επαλήθευση είναι απείρως ευκολότερη και μας δίνει παραδειγματικά έναν εύκολο τρόπο κατασκευής δύσκολα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων: $\left(\mathrm{Arctg}\,\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2+1}\,\frac{1-x^2-x(-2x)}{(1-x^2)^2} =$

$$= \frac{1+x^2}{x^2+(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{x^2+1+x^4-2x^2}$$]

A [1.21α] $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$

$$x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4 = (x+1)^2+4$$

$$\frac{1}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+5} + \frac{\Gamma x+\Delta}{(x^2+2x+5)^2} \iff$$

$$1 = (Ax+B)(x^2+2x+5) + \Gamma x + \Delta = Ax^3 + (B+2A)x^2 + (2B+5A+\Gamma)x + 5B+\Delta$$

$$\Rightarrow A = B = \Gamma = 0, \ \Delta = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+4)^2} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)^2} \underset{y=\frac{x+1}{2}}{=} \frac{1}{8}\int \frac{dy}{(y^2+1)^2}$$

όπου (βλ. Πδ. [1.50], Σημ. 2-1/13,14) $\displaystyle\int \frac{dy}{(y^2+1)^2} = \int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^2}dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^2}dy$

$$= \int \frac{dy}{y^2+1} - \frac{1}{2}\left(y\left(-\frac{1}{y^2+1}\right) + \int \frac{dy}{y^2+1}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} y + \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1} + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{1}{16}\operatorname{Arctg}\frac{x+1}{2} + \frac{1}{16}\frac{x+1}{2\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)} + c = \frac{1}{16}\operatorname{Arctg}\frac{x+1}{2} + \frac{1}{8}\frac{x+1}{x^2+2x+5} + c$$