Notiztitel 01.04.2012

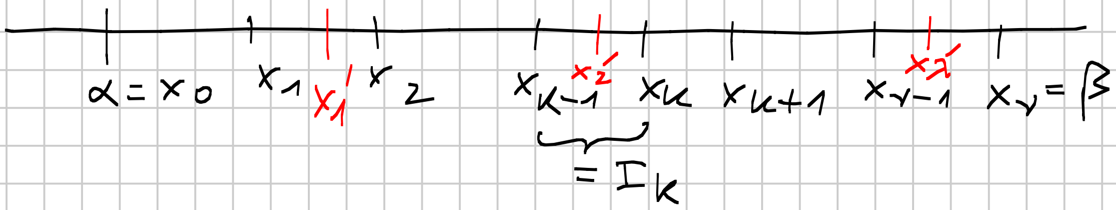
[Κεφ. 2] Το ορισμένο ολοκλήρωμα του Riemann

[§2.2] Πρώτος ορισμός (μέσω άνω και κάτω αθροισμάτων)

Έστω $I=[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ ($\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$) κλειστό και φραγμένο διάστημα.

Μια **διαμέριση του I** είναι ένα πεπερασμένο, διατεταγμένο σύνολο $P=\{x_0,x_1,\dots,x_\nu\}$, $\nu\in\mathbb{N}$, σημείων του I, τέτοιων ώστε

$$\alpha=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{\nu-1}<x_\nu=\beta.$$



P $\quad P^*=P\cup\{x_1',\dots,x_\nu'\}$

Τα $\nu+1$ σημεία μιας διαμέρισης P του I διακόπτουν το I σε ν διαστήματα $I_k=[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\dots,\nu$, τα **τμήματα της διαμέρισης**.

Το μήκος του μεγαλυτέρου τμήματος της διαμέρισης λέγεται __λεπτότητα της διαμέρισης__ $\|P\| := \max\{x_k - x_{k-1} : k = 1, 2, \dots, \nu\}$.

Έστω P μια διαμέριση του I. Η διαμέριση $P^* = \{x_0, \dots, x_\mu\}, \mu \in \mathbb{N}\}$ του I λέγεται __λεπτότερη από την P__, αν και μόνο αν $P \subseteq P^*$.

Ισχύουν: α) $P \subseteq P^* \Rightarrow \|P^*\| \leq \|P\|$

β) P_1, P_2 διαμερίσεις του I $\Rightarrow$ $P_1 \cup P_2$ διαμέριση του I με $P_1 \cup P_2 \supseteq P_i, i = 1,2$

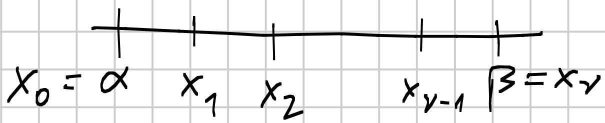
$P_1 \cap P_2$ —— " —— με $P_1 \cap P_2 \subseteq P_i, i = 1,2$

γ) P διαμέριση του I, $c \in P$ $\Rightarrow$ $P \cap [\alpha, c]$ διαμέριση του $[\alpha, c]$

$P \cap [c, \beta]$ —— " —— $[c, \beta]$

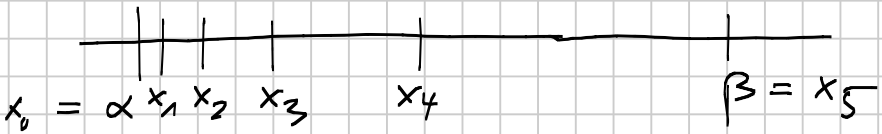
δ) P_1 διαμέριση του $[\alpha, c]$, P_2 διαμέριση του $[c, \beta]$ $\Rightarrow$ $P_1 \cup P_2$ διαμέριση του I

Πδ. [2.1] $P = \left\{ \alpha + i\,\frac{\beta-\alpha}{\nu} : i = 0, \dots, \nu \right\}$



με $\|P\| = \max\left\{ x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, \nu \right\} = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$

Πδ. [2.2] $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$, $P = \left\{ \alpha \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{i}{\nu}} : i = 0, \dots, \nu \right\}$



με $\|P\| = \max\left\{ \alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{i-1}{\nu}}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\nu}} - 1\right) : i = 1, \dots, \nu \right\} = \alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)$

$$= \beta - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}}$$

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ φραγμένη με $m := \inf f(I)$, $M := \sup f(I)$

και $P = \{x_0, \dots, x_\nu\}$ διαμέριση του I

$\Longrightarrow \forall\, k = 1, 2, \dots, \nu$ $\exists$

$$m_k := \inf f(I_k) = \inf\{f(x) : x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]\}$$

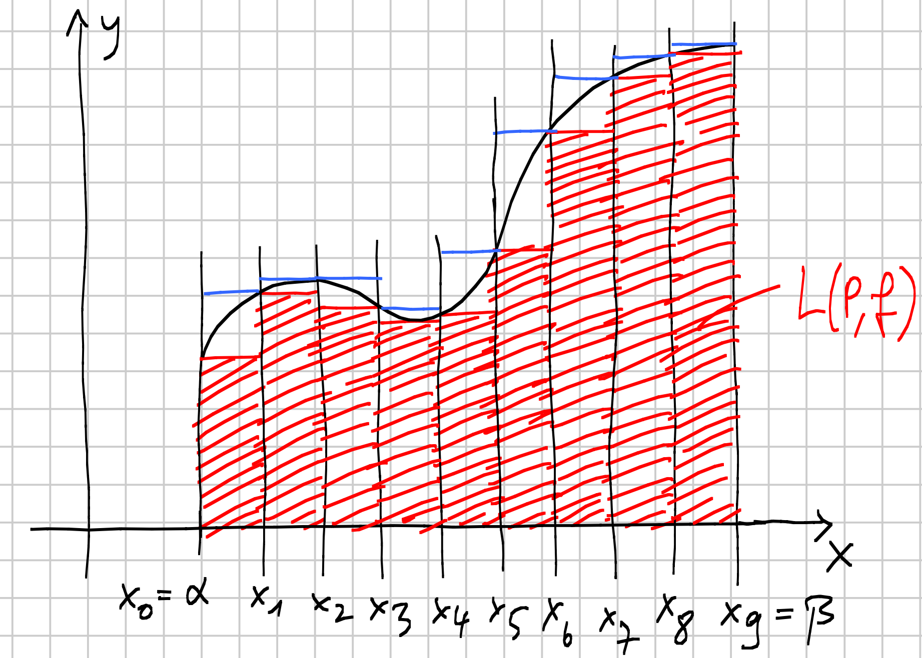
$$M_k := \sup f(I_k) = \sup\{f(x) : x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]\}$$

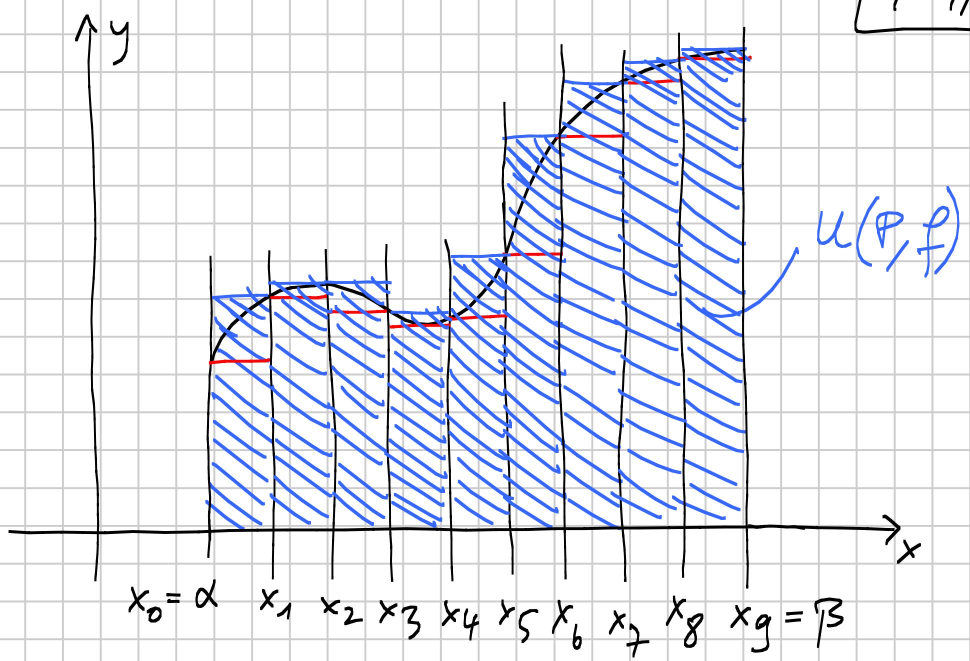
Οι αριθμοί $\quad L(P, f) := \sum_{k=1}^{\nu} m_k (x_k - x_{k-1})$,

$$U(P, f) := \sum_{k=1}^{\nu} M_k (x_k - x_{k-1})$$

ονομάζονται, αντίστοιχα, <u>κάτω και άνω άθροισμα της f</u>

<u>ως προς την διαμέριση P</u> (<u>l</u>ower and <u>u</u>pper sum)





Πρόταση [2.3] : $f : I \to \mathbb{R}$ φραγμένη και P διαμέριση του I

$\Rightarrow \quad L(P,f) \leq U(P,f)$

Απόδειξη : $L(P,f) = \sum_{k=1}^{\nu} m_k (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{\nu} M_k (x_k - x_{k-1}) = U(P,f)$

αφού $m_k = \inf f(I_k) \leq \sup f(I_k) = M_k$ και $x_k - x_{k-1} > 0 \;\; \forall k = 1, \dots, \nu$. $\square$

Πρόταση [2.4]: $f : I \to \mathbb{R}$ φραγμένη με $|f(x)| \leq K \ \forall x \in I$,
P, P^* διαμερίσεις του I με $P^* = P \cup \{y_1, \dots, y_n\}$, $y_i \in I$,
$y_i \notin P$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad L(P, f) \leq L(P^*, f) \leq L(P, f) + 2Kn\|P\|, \quad (1)$$

$$U(P, f) - 2Kn\|P\| \leq U(P^*, f) \leq U(P, f) \quad (2)$$

Απόδειξη:

Έστω $n = 1$ και $P = \{x_0, x_1, \dots, x_\nu\} \Rightarrow \exists\ \mu \in \{1, \dots, \nu\} : y_1 \in (x_{\mu-1}, x_\mu)$

$\Rightarrow$ Για $m_\mu' := \inf\{f(x) : x \in [x_{\mu-1}, y_1]\}$, $m_\mu'' := \inf\{f(x) : x \in [y_1, x_\mu]\}$ ισχύει

$$m_\mu', \ m_\mu'' \geq m_\mu := \inf\{f(x) : x \in [x_{\mu-1}, x_\mu]\}$$

(αφού $B \subseteq A \Rightarrow \inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$)

$$\Rightarrow L(P^*, f) = \sum_{k=1}^{\mu-1} m_k (x_k - x_{k-1}) + m_\mu' (y_1 - x_{\mu-1}) + m_\mu'' (x_\mu - y_1)$$

$$+ \sum_{k=\mu+1}^{\nu} m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{\mu-1} m_k (x_k - x_{k-1}) + m_\mu (y_1 - x_{\mu-1} + x_\mu - y_1)$$

$$+ (m_\mu' - m_\mu)(y_1 - x_{\mu-1}) + (m_\mu'' - m_\mu)(x_\mu - y_1)$$

$$+ \sum_{k=\mu+1}^{\nu} m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$= L(P, f) + \underbrace{(m_\mu' - m_\mu)}_{\geq 0}\underbrace{(y_1 - x_{\mu-1})}_{>0} + \underbrace{(m_\mu'' - m_\mu)}_{\geq 0}\underbrace{(x_\mu - y_1)}_{>0}$$

$\Rightarrow L(P, f) \leq L(P^*, f)$ και $L(P^*, f) \leq L(P, f) + 2K\|P\|$,

αφού $-K \leq m_\mu \leq m_\mu' \leq K$, $-K \leq m_\mu \leq m_\mu'' \leq K \Rightarrow m_\mu' - m_\mu, m_\mu'' - m_\mu \leq 2K$

Έστω τώρα $P^* = P \cup \{y_1, \dots, y_n\} \Rightarrow$ Για $P_{i+1} = P \cup \{y_1, \dots, y_i\}$, [4-118]

$i = 0, \dots, \nu-1$, ισχύει σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$L(P_i, f) \leq L(P_{i+1}, f) \quad \text{και} \quad L(P_{i+1}, f) \leq L(P_i, f) + 2K\|P\|$$

και άρα λόγω της μεταβατικότητας της διάταξης

$$L(P, f) \leq L(P^*, f) \quad \text{και} \quad L(P^*, f) \leq L(P, f) + 2Kn\|P\|$$

[Η (2) αποδεικνύεται ανάλογα ή ακολουθεί από την (1), αφού

$U(P,f) = -L(P,-f)$ (βλ. [Ντ., Εφ. 1, §2.2]):

$U(P,f) = -L(P,-f) \geq -L(P^*,-f) = U(P^*,f)$,

$U(P^*,f) = -L(P^*,-f) \geq -L(P,-f) - 2Kn\|P\| = U(P,f) - 2Kn\|P\|$]

$\square$

Πρόταση [2.5]: $f : I \to \mathbb{R}$ φραγμένη, P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του I

$$\Longrightarrow \quad L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$$

Απόδειξη: $P^* := P_1 \cup P_2 \geq P_1, P_2 \Longrightarrow L(P_1, f) \underset{\text{Πρ.}[2.4]}{\leq} L(P^*, f) \underset{\text{Πρ.}[2.3]}{\leq} U(P^*, f) \underset{\text{Πρ.}[2.4]}{\leq} U(P_2, f)$ $\square$

Πρόταση [2.7′]: $f : I \to \mathbb{R}$ φραγμένη, $m := \inf f(I)$, $M := \sup f(I)$, P διαμέριση του $I \Longrightarrow m(\beta - \alpha) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(\beta - \alpha)$

Απόδειξη: Έστω $P = \{x_0, \ldots, x_\nu\}$. Αφού $m \leq m_k := \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ $\leq \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} =: M_k \leq M \quad \forall\, k = 1, \ldots, \nu$, έχουμε

$$m(\beta - \alpha) = \sum_{k=1}^{\nu} m\,(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{\nu} m_k (x_k - x_{k-1}) = L(P, f) \underset{\text{Πρ.}[2.3]}{\leq} U(P, f)$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} M_k (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{\nu} M\,(x_k - x_{k-1}) = M(\beta - \alpha)$$

$\square$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(I)$ το σύνολο (όλων) των (δυνατών) διαμερίσεων του I.

Πρόταση [2.7]: $f : I \to \mathbb{R}$ φραγμένη $\Rightarrow \exists$

$L_f := \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}(I)\} \in \mathbb{R}$, $U_f := \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}(I)\} \in \mathbb{R}$

και $L_f \leq U_f$

Απόδειξη:

Από την Πρόταση [2.7΄] γνωρίζουμε ότι τα σύνολα $\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}(I)\} \subset \mathbb{R}$ και $\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}(I)\} \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένα. Επίσης είναι μη κενά, αφού το πρώτο περιέχει το $m(\beta-\alpha)$ και το δεύτερο το $M(\beta-\alpha)$. Άρα σύμφωνα με το Αξίωμα Πληρότητας $\exists\, L_f, U_f \in \mathbb{R}$.

Πρόταση [2.5]: $\forall\, P_1, P_2 \in \mathcal{P}(I) : L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$

$\Rightarrow \forall\, P_1 \in \mathcal{P}(I) : L(P_1, f) \leq U_f \Rightarrow L_f \leq U_f$ $\square$

Ορισμός [2.6, 2.9]: Έστω $f : I = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη.
Οι πραγματικοί αριθμοί $L_f := \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}(I)\}$ και $U_f := \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}(I)\}$ λέγονται <u>κάτω και άνω ολοκλήρωμα της f στο I</u>, αντίστοιχα.
Η f λέγεται <u>ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) στο I</u> αν $L_f = U_f$, και τότε η κοινή τιμή των L_f και U_f λέγεται <u>ολοκλήρωμα (Riemann) της f στο I</u> και συμβολίζεται με

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := L_f = U_f .$$

Επίσης ορίζουμε: $\int_\beta^\alpha f(x)\,dx := -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ και $\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx := 0$.
Τα α, β λέγονται <u>άκρα ολοκλήρωσης της f</u> και η (βουβή) μεταβλητή x μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε άλλη.

Παρατήρηση [2.10]: Να προσεχθεί ότι το ολοκλήρωμα Riemann ορίσθηκε για συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα και είναι φραγμένες.

Παρατήρηση [2.8]: Από τον ορισμό των κάτω και άνω ολοκληρωμάτων της f στο I προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν διαμερίσεις P_1, P_2 του I ούτως ώστε για τα αντίστοιχα κάτω και άνω αθροίσματα να ισχύουν: $L(P_1,f) > L_f - \varepsilon$, $U(P_2,f) < U_f + \varepsilon$.

Θεώρημα [2.16] (Θεώρημα του Darboux)

$f: I \to \mathbb{R}$ φραγμένη $\Longrightarrow$ $\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0 \; \forall P \in \mathcal{P}(I)$ με $\|P\|<\delta$:

$$L(P,f) > L_f - \varepsilon, \quad U(P,f) < U_f + \varepsilon$$

[Απόδειξη: $f: I \to \mathbb{R}$ φραγμένη $\Rightarrow \exists K \geq 0 : |f(x)| \leq K \ \forall x \in I$

και (Πρ [2.8]) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_1, P_2 \in \mathcal{P}(f)$: $L(P_1, f) > L_f - \frac{\varepsilon}{2}$, $U(P_2, f) < U_f + \frac{\varepsilon}{2}$.

Έστω $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{m+1}\}$, $m > 0$, και $P \in \mathcal{P}(I)$, $P^* := P \cup P_1 \supseteq P_1$

$\underset{\text{Πρ. [2.4]}}{\Longrightarrow}$ $L(P^*, f) \geq L(P_1, f)$ και $L(P^*, f) \leq L(P, f) + 2Km\|P\|$

αφού η P^* έχει το πολύ m στοιχεία περισσότερα από την P $(\alpha, \beta \in P \cap P_1)$

$\Rightarrow$ Για $\delta := \frac{\varepsilon}{4Km}$ και $P \in \mathcal{P}(I)$ με $\|P\| < \delta$ έχουμε

$$L_f - \varepsilon = L_f - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(P^*, f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq L(P, f) + 2Km\|P\| - \frac{\varepsilon}{2} < L(P, f) + 2Km\delta - \frac{\varepsilon}{2} = L(P, f).$$

Αντίστοιχα, έστω $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_{n+1}\}$, $n > 0$, $P \in \mathcal{P}(I)$, $P^* := P \cup P_2$

$\Rightarrow U(P^*, f) \leq U(P_2, f)$, $U(P^*, f) \geq U(P, f) - 2Kn\|P\|$ $\Rightarrow$ Για $\delta := \frac{\varepsilon}{4Kn}$

και $P \in \mathcal{P}(I)$ με $\|P\| < \delta$: $U_f + \varepsilon = U_f + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > U(P_2, f) + \frac{\varepsilon}{2} \geq U(P^*, f) + \frac{\varepsilon}{2} \geq$

$\geq U(P, f) - 2Kn\|P\| + \frac{\varepsilon}{2} > U(P, f) - 2Kn\delta + \frac{\varepsilon}{2} = U(P, f)$.]

Πρόταση [2.13]: $f(x) = c \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \Longrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta c\,dx = c(\beta-\alpha)$

Απόδειξη: $\forall \quad P = \{x_0, \dots, x_\nu\} \in \mathcal{P}(I), \ \forall k = 1, \dots, \nu$:

$$m_k := \inf f([x_{k-1}, x_k]) = c, \quad M_k := \sup f([x_{k-1}, x_k]) = c$$

$$\Rightarrow L(P, f) := \sum_{k=1}^{\nu} m_k (x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^{\nu} (x_k - x_{k-1}) = c(\beta - \alpha)$$

$$\text{και} \quad U(P, f) := \sum_{k=1}^{\nu} M_k (x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^{\nu} (x_k - x_{k-1}) = c(\beta - \alpha)$$

$$\Rightarrow L_f := \sup\{L(P, f) : P \in \mathcal{P}(I)\} = c(\beta-\alpha) = \inf\{U(P, f) : P \in \mathcal{P}(I)\} =: U_f$$

$$\Rightarrow \quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx := L_f = U_f = c(\beta - \alpha).$$