[§2.3] Συνθήκες ολοκληρωσιμότητας (μέσω άνω και κάτω αθροισμάτων)

Θ. [2.18] (Συνθήκη του Riemann – Α΄ Μορφή)

$f : I = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε: f ολοκληρώσιμη στο I

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall P \in \mathcal{P}(I)$ με $\|P\| < \delta$: $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$

Απόδειξη:

$\Rightarrow$: f ολοκληρώσιμη $\Longleftrightarrow L_f = U_f$ (1)

Έστω $\varepsilon > 0 \underset{\text{Darboux}}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0 \ \forall P \in \mathcal{P}(I)$ με $\|P\| < \delta$:

$$\left. \begin{array}{l} U(P,f) < U_f + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \underbrace{L(P,f) > L_f - \frac{\varepsilon}{2}} \\ \qquad\qquad \Longleftrightarrow -L(P,f) < -L_f + \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow U(P,f) - L(P,f) < U_f - L_f + \varepsilon \underset{(1)}{=} \varepsilon$$

4-2/2

$\Leftarrow$: $f : I = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη $\underset{\text{Πρ. [2.7]}}{\Longrightarrow}$ $\exists\ L_f, U_f \in \mathbb{R}$ $\forall\ P \in \mathcal{P}(I)$

$L(P,f) \leq L_f \leq U_f \leq U(P,f) \Rightarrow 0 \leq U_f - L_f \leq U(P,f) - L(P,f)$ (2)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ P \in \mathcal{P}(I)$ με $\|P\| < \delta$: $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon \underset{(2)}{\Longrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0$: $0 \leq U_f - L_f < \varepsilon \underset{(*)}{\Longleftrightarrow} U_f = L_f$

[(*): Αν $U_f - L_f > 0$, τότε για $\varepsilon := U_f - L_f$: $U_f - L_f < U_f - L_f$ ↯] $\square$

Θ. [2.19] (Συνθήκη του Riemann – Β΄ Μορφή)

$f : I = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε : f ολοκληρώσιμη στο I

$\Longleftrightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ P \in \mathcal{P}(I)$: $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$

Απόδειξη:

$\Rightarrow$: f ολοκληρώσιμη $\Longleftrightarrow L_f = U_f$ (3)

Έστω $\varepsilon>0 \underset{\substack{\Pi\tau\ [2.8] \\ \text{ή } Op\ [2.6]}}{\Longrightarrow} \exists\, P_1, P_2 \in \mathcal{P}(I) : L(P_1, f) > L_f - \frac{\varepsilon}{2},\ U(P_2, f) < U_f + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow L_f - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f) \underset{\Pi\rho.\,[2.4]}{\leq} L(P_1 \cup P_2, f) \underset{\Pi\rho.\,[2.3]}{\leq} U(P_1 \cup P_2, f) \underset{\Pi\rho.\,[2.4]}{\leq} U(P_2, f) < U_f + \frac{\varepsilon}{2}$$

αφού $P_1, P_2 \subseteq P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}(I)$

$$\Rightarrow U(P_1 \cup P_2, f) - L(P_1 \cup P_2, f) < U_f - L_f + \varepsilon \underset{(3)}{=} \varepsilon$$

$\Leftarrow$: $f : I = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη $\underset{\Pi\rho.\,[2.7]}{\Longrightarrow} \exists\, L_f, U_f \in \mathbb{R}\quad \forall P \in \mathcal{P}(I)$

$$L(P, f) \leq L_f \leq U_f \leq U(P, f) \Rightarrow 0 \leq U_f - L_f \leq U(P, f) - L(P, f) \quad (4)$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\, P \in \mathcal{P}(I) : U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon \underset{(4)}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon>0 : 0 \leq U_f - L_f < \varepsilon \Longleftrightarrow U_f = L_f$$

$\square$

Πόρισμα :

$f : I=[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη, $\exists\, (P_\nu), (Q_\nu) \subset \mathcal{P}(I)$: $\lim\left(U(P_\nu,f)-L(Q_\nu,f)\right)=0$

$\Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη στο I και $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim U(P_\nu,f) = \lim L(Q_\nu,f)$.

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu\in\mathbb{N},\ \nu\geq\nu_0 : 0\leq U(P_\nu,f)-L(Q_\nu,f)<\varepsilon$ (5)

Πρ. [2.4] : $U(P_\nu\cup Q_\nu,f)\leq U(P_\nu,f)$, $L(Q_\nu,f)\leq L(P_\nu\cup Q_\nu,f)$ (6)

$$\underset{(5),(6)}{\Longrightarrow}\quad U(P_\nu\cup Q_\nu,f)-L(P_\nu\cup Q_\nu,f)\leq U(P_\nu,f)-L(Q_\nu,f)<\varepsilon$$

$\underset{\text{Συνθ. Riemann (B')}}{\Longrightarrow}$ f ολοκληρώσιμη στο $I \iff \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = L_f = U_f$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx-\varepsilon = U_f-\varepsilon < U_f \leq U(P_\nu,f) \underset{(5)}{<} L(Q_\nu,f)+\varepsilon$$

$$\leq L_f+\varepsilon = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| U(P_\nu, f) - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \right| < \varepsilon, \text{ δηλ. } \lim U(P_\nu, f) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \lim L(Q_\nu, f) = \lim U(P_\nu, f) - \underbrace{\lim\big(U(P_\nu, f) - L(Q_\nu, f)\big)}_{=0}$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

$\square$

Παρατήρηση [2.21]:

Από το παραπάνω Πόρισμα προκύπτει ειδικότερα:

$f : I = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη, $\exists\, (P_\nu) \subset \mathcal{P}(I) : \lim\big(U(P_\nu, f) - L(P_\nu, f)\big) = 0$

$\Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη στο I και $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim U(P_\nu, f) = \lim L(P_\nu, f)$

[και ακόμη ειδικότερα:

$f : I = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη, $\exists\, (P_\nu) \subset \mathcal{P}(I) : \lim U(P_\nu, f) = \lim L(P_\nu, f) = a$

$\Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη στο I και $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = a$]

[Εφ. §2.3] $f(x) = x - x^2$, $x \in [0,1]$. Να δείξετε ότι η f

ικανοποιεί την συνθήκη του Riemann.

Απόδειξη: Η f είναι φραγμένη ως συνεχής, ορισμένη σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Επειδή $f'(x) = 1-2x \begin{cases} \geq 0, & x\in[0,\frac{1}{2}] \\ \leq 0, & x \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$

η f είναι αύξουσα στο $[0,\frac{1}{2}]$, φθίνουσα στο $[\frac{1}{2},1]$.

Χωρίζουμε τα διαστήματα $[0,\frac{1}{2}]$ και $[\frac{1}{2},1]$ σε ν ίσα τμήματα θεωρώντας αντίστοιχα τις διαμερίσεις $P_\nu = \left\{0, \frac{1}{2\nu}, \frac{2}{2\nu}, \dots, \frac{\nu}{2\nu}\right\}$

$Q_\nu = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2\nu}, \frac{1}{2}+\frac{2}{2\nu}, \dots, \frac{1}{2}+\frac{\nu}{2\nu}\right\}$

$$\Rightarrow \quad U(P_\nu \cup Q_\nu, f) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2\nu}\left[\cancel{\frac{k}{2\nu}} - \left(\frac{k}{2\nu}\right)^2 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{k-1}{2\nu}} - \left(\frac{1}{2}+\frac{k-1}{2\nu}\right)^2\right]$$

$$L(P_\nu \cup Q_\nu, f) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2\nu}\left[\cancel{\frac{k-1}{2\nu}} - \left(\frac{k-1}{2\nu}\right)^2 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{k}{2\nu}} - \left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2\nu}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad U(P_\nu \cup Q_\nu, f) - L(P_\nu \cup Q_\nu, f) =$$

$$= \frac{1}{2\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \left[-2 \frac{k}{(2\nu)^2} + \cancel{\frac{1}{(2\nu)^2}} + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2\nu}\right)\frac{1}{2\nu} - \cancel{\frac{1}{(2\nu)^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\nu)^3} \sum_{k=1}^{\nu} \left[-2k + 2(\nu + k) \right] = \frac{1}{(2\nu)^3}\, 2\nu^2 = \frac{1}{4\nu}$$

$\Rightarrow$ Αφού $\frac{1}{4\nu} \to 0$, δηλ. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \forall \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq \nu_0 : \frac{1}{4\nu} < \varepsilon$,

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \forall \nu \geq \nu_0 : U(P_\nu \cup Q_\nu, f) - L(P_\nu \cup Q_\nu, f) < \varepsilon$,

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists P_{\nu_0} \cup Q_{\nu_0} \in \mathcal{P}(I) :$ ——— 〃 ——— ,

δηλ. η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ σύμφωνα με την συνθήκη του Riemann (Β').