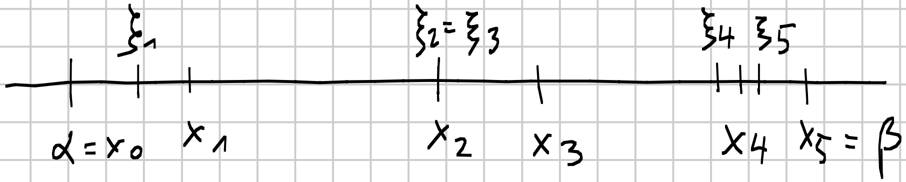
[Κεφ. 2] Το ορισμένο ολοκλήρωμα του Riemann

[§2.4] Δεύτερος ορισμός (μέσω αθροισμάτων Riemann)

Έστω $P=\{x_0, x_1, \dots, x_\nu\} \in \mathcal{P}([\alpha,\beta])$, $\nu \in \mathbb{N}$, μια διαμέριση του κλειστού και φραγμένου διαστήματος $[\alpha,\beta]$, δηλ. $\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$.

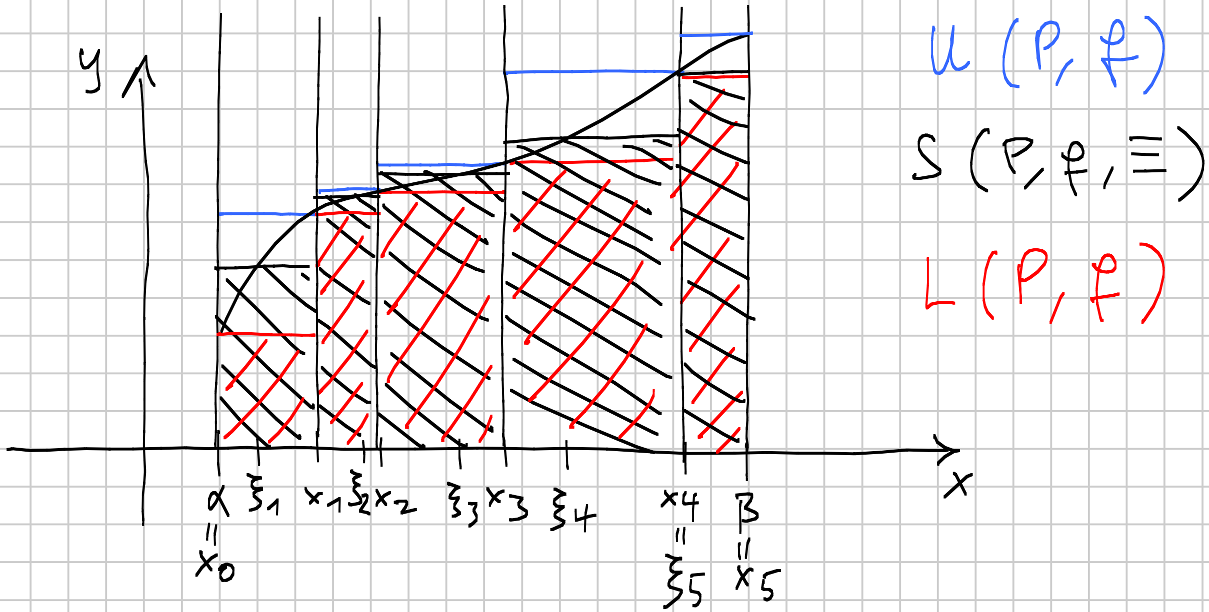
Οι αριθμοί $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_\nu\}$ με $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, \nu$, αποτελούν μια <u>επιλογή ενδιάμεσων σημείων της διαμέρισης</u> P.



<u>Ορισμός</u>: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, $P=\{x_0,\dots,x_\nu\}\in\mathcal{P}([\alpha,\beta])$, $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_\nu\}$ μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων της P. Ο αριθμός

$$S(P,f,\Xi):=\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

λέγεται <u>άθροισμα Riemann της f για την διαμέριση P και την επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ</u>.



Παρατηρήσεις :

α) Τα αθροίσματα Riemann ορίζονται και για μη φραγμένες συναρτήσεις $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$

β) $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη $\Longrightarrow$ $\forall\, P\in\mathcal{P}([\alpha,\beta])$ $\forall$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ της P : $L(P,f)\leq S(P,f,\Xi)\leq U(P,f)$

[Έστω $P=\{x_0,\dots,x_\nu\}\in\mathcal{P}([\alpha,\beta])$, $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_\nu\}$ μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων της P. Τότε, αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη, $\forall\, k=1,\dots,\nu$ $\exists$ $m_k:=\inf\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}$, $M_k:=\sup\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}$ και $m_k\leq f(\xi_k)\leq M_k \Rightarrow L(P,f):=\sum_{k=1}^{\nu} m_k(x_k-x_{k-1})$
$\leq \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) =: S(P,f,\Xi) \leq \sum_{k=1}^{\nu} M_k(x_k-x_{k-1}) =: U(P,f)$]

γ) $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \forall P \in \mathcal{P}([\alpha,\beta]) \ \exists$ επιλογές Ξ', Ξ'' ενδιάμεσων σημείων της P με $L(P,f) = S(P,f,\Xi')$ και $U(P,f) = S(P,f,\Xi'') \overset{}{\underset{\beta)}{\Longrightarrow}} L(P,f) = \min\{S(P,f,\Xi) : \Xi$ επιλογή ενδ. σημ. της $P\}$ και $U(P,f) = \max\{S(P,f,\Xi) : \Xi$ επιλογή ενδ. σημ. της $P\}$

Ορισμός [2.24] :

$f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ <u>ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) στο $[\alpha,\beta]$</u> $:\Longleftrightarrow$ $\exists A \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall P \in \mathcal{P}([\alpha,\beta])$ με $\|P\| < \delta \ \forall$ επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων της P : $|S(P,f,\Xi) - A| < \varepsilon$.

Θ. [2.26]: $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ σύμφωνα με τον Ορισμό [2.24] $\Longrightarrow$ το $A\in\mathbb{R}$ του Ορισμού [2.24] είναι μοναδικό και λέγεται ολοκλήρωμα (Riemann) της f στο $[\alpha,\beta]$, $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := A$.

Απόδειξη:

Έστω $A_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2$, που ικανοποιούν την συνθήκη του Ορισμού [2.24] και έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists\,\delta_i>0$ $\forall P_i\in\mathcal{P}([\alpha,\beta])$ με $\|P_i\|<\delta_i$ $\forall\, \Xi_i$ επιλογή ενδ. σημ. της P_i: $|S(P_i,f,\Xi_i)-A_i|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$\Longrightarrow$ $\forall P\in\mathcal{P}([\alpha,\beta])$ με $\|P\|<\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$, $\forall\, \Xi$ επιλ. ενδ. σημ. της P: $|A_1-A_2|\le|A_1-S(P,f,\Xi)|+|S(P,f,\Xi)-A_2|<\varepsilon$.

Αφού αυτό ισχύει $\forall\varepsilon>0$, έχουμε: $A_1=A_2$. $\square$

Θ. [2.27]: $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ σύμφωνα με τον Ορισμό [2.24] $\Longrightarrow$ f φραγμένη.

Απόδειξη:

Έστω ότι η f δεν είναι φραγμένη. Αφού είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον Ορισμό [2.24], $\exists\, A\in\mathbb{R},\ \delta>0\ \ \forall\, P=\{x_0,\dots,x_\nu\}\in\mathcal{P}([\alpha,\beta])$ με $\|P\|<\delta$, $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_\nu\}$ επιλ. ενδ. σημ. της P: $\left|\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-A\right|<1$ (*)

Έστω P μια τέτοια διαμέριση (δηλ. με $\|P\|<\delta$). Τότε $\exists\, \lambda\in\{1,\dots,\nu\}$:

$f|_{[x_{\lambda-1},x_\lambda]}$ δεν είναι φραγμένη [$f|_{[x_{k-1},x_k]}$ φραγμένη $\forall\, k=1,\dots,\nu \iff$

$\iff \forall\, k\in\{1,\dots,\nu\}\ \exists\, M_k\geq 0\ \forall\, x\in[x_{k-1},x_k]: |f(x)|\leq M_k$

$\Rightarrow \forall\, x\in[\alpha,\beta]: |f(x)|\leq \max\{M_k: k=1,\dots,\nu\} \iff f$ φραγμένη]

$$\underset{(*)}{\Longrightarrow}\ |f(\xi_\lambda)|(x_\lambda-x_{\lambda-1})-\left|\sum_{\substack{k=1\\k\neq\lambda}}^{\nu} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-A\right|<1 \quad \big[\,|x|-|y|\leq|x-y|\,\big]$$

$\iff |f(\xi_\lambda)| \leq \frac{1}{x_\lambda - x_{\lambda-1}} \left(1 + \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \lambda}}^{\nu} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - A \right| \right) =: C$ (ανεξάρτητο του ξ_λ)

5-1/7

Έστω τώρα Ξ οι επιλ. ενδ. σημ. της P για κάποια (σταθερά) ξ_k, $k=1,\dots,\nu$, $k \neq \lambda$.

Τότε $\forall\, \xi_\lambda \in [x_{\lambda-1}, x_\lambda] : |f(\xi_\lambda)| \leq C$, δηλ. $f|_{[x_{\lambda-1}, x_\lambda]}$ φραγμένη, που είναι άτοπο. $\square$

Παρατ. [2.29] : Το Θ. [2.27] μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα και ως εξής: η $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένη $\Rightarrow$ η f δεν είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον Ορισμό [2.24]

Υπενθυμίζουμε ότι αν η $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένη δεν ορίζεται η ολοκληρωσιμότητά της ούτε με τον Ορισμό [2.9]. Ισοδύναμα μπορεί να αποδειχθεί: η $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένη

$\Rightarrow$ η f δεν είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον Ορισμό [2.9]
(αφού αν η f δεν είναι κάτω (άνω) φραγμένη, τότε $L_f = -\infty$ ($U_f = \infty$))

Θ. [2.32] Οι Ορισμοί [2.9] και [2.24] της ολοκληρωσιμότητας (κατά Riemann) μιας συνάρτησης $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ στο $[\alpha, \beta]$ (μέσω άνω και κάτω αθροισμάτων και αθροισμάτων Riemann, αντίστοιχα) είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη:

Έστω ότι η f δεν είναι φραγμένη. Τότε σύμφωνα και με τους δύο Ορισμούς [2.9] και [2.24] η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Έστω ότι η f είναι φραγμένη και ολοκληρώσιμη σύμφωνα

με τον Ορισμό [2.9] $\Rightarrow \exists\, L_f := \sup\{ L(P,f) : P \in \mathcal{P}([\alpha,\beta])\} \in \mathbb{R}$,
$U_f := \inf\{ U(P,f) : P \in \mathcal{P}([\alpha,\beta])\} \in \mathbb{R}$, όπου για $P = \{x_0, \ldots, x_\nu\}$

$$L(P,f) := \sum_{k=1}^{\nu} \inf f|_{[x_{k-1},x_k]} (x_k - x_{k-1}), \quad U(P,f) := \sum_{k=1}^{\nu} \sup f|_{[x_{k-1},x_k]} (x_k - x_{k-1})$$

και $L_f = U_f =: \int_\alpha^\beta f(x)\,dx =: A$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα του Darboux ([2.16]) και την Πρόταση [2.3], $\exists\, \delta > 0\ \forall P \in \mathcal{P}([\alpha,\beta])$ με $\|P\| < \delta$:

$$A - \varepsilon = L_f - \varepsilon < L(P,f) \leq U(P,f) < U_f + \varepsilon = A + \varepsilon .$$

Απ' την άλλη, $\forall$ επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων της P:

$$L(P,f) \leq S(P,f,\Xi) \leq U(P,f) \quad (\text{βλ. Παρατ. β), Σημ. 5-1/3})$$

Συνεπώς $\exists\, \delta > 0\ \forall P \in \mathcal{P}([\alpha,\beta])$ με $\|P\| < \delta$ $\forall$ επιλ. Ξ ενδ. σημ. της P:

$$A - \varepsilon < S(P,f,\Xi) < A + \varepsilon \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad |S(P,f,\Xi) - A| < \varepsilon .$$

Έστω ότι η f είναι φραγμένη και ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον Ορισμό [2.24], δηλ. $\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall P \in \mathcal{P}([\alpha,\beta])$ με $\|P\| < \delta$, $\forall$ επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων της P: $|S(P,f,\Xi) - A| < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists \delta > 0\ \forall P = \{x_0, \dots, x_\nu\} \in \mathcal{P}([\alpha,\beta])$ με $\|P\| < \delta$, $\forall$ επιλ. Ξ ενδ. σημ. της P: $|S(P,f,\Xi) - A| < \frac{\varepsilon}{4}$ ή, ισοδύναμα,

$$A - \frac{\varepsilon}{4} < S(P,f,\Xi) < A + \frac{\varepsilon}{4} \qquad (1)$$

Απ' την άλλη, αφού η f είναι φραγμένη, $\forall k = 1, \dots, \nu\ \exists\ \xi_k', \xi_k'' \in [x_{k-1}, x_k]$

$$f(\xi_k') > \sup f|_{[x_{k-1},x_k]} - \frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}, \quad f(\xi_k'') < \inf f|_{[x_{k-1},x_k]} + \frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$$

$$\Rightarrow S(P,f,\Xi') := \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k')(x_k - x_{k-1}) > \sum_{k=1}^{\nu} \sup f|_{[x_{k-1},x_k]}(x_k - x_{k-1})$$

$$- \frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)} \sum_{k=1}^{\nu}(x_k - x_{k-1}) = U(P,f) - \frac{\varepsilon}{4} \qquad (2),$$

$$S(P,f,\Xi'') := \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k'')(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{\nu} \inf f|_{[x_{k-1},x_k]}(x_k - x_{k-1})$$

$$+ \frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)} \sum_{k=1}^{\nu} (x_k - x_{k-1}) = L(P,f) + \frac{\varepsilon}{4} \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (1), (3) έχουμε, αντίστοιχα,

$$U(P,f) - \frac{\varepsilon}{4} < S(P,f,\Xi') < A + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{και} \quad A - \frac{\varepsilon}{4} < S(P,f,\Xi'') < L(P,f) + \frac{\varepsilon}{4}$$

από τις οποίες προκύπτει

$$U(P,f) - L(P,f) < A + \frac{\varepsilon}{2} - \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

και άρα, σύμφωνα με την συνθήκη του Riemann (Α' και Β'),

(εδώ αρκεί: $L(P,f) \underset{\text{Ορ.}[2.6]}{\leq} L_f \underset{\text{Πρότ.}[2.7]}{\leq} U_f \underset{\text{Ορ.}[2.6]}{\leq} U(P,f)$, απ' όπου προκύπτει

$0 \leq U_f - L_f \leq U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$, δηλ. $U_f = L_f$)

η f είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον Ορισμό [2.9]. $\square$