Notiztitel   20.04.2012

[§2.5] Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Υπενθύμιση: (Αρνητικό κριτήριο ολοκληρωσιμότητας)

Θ. [2.27]: $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μη φραγμένη $\Rightarrow$ f μη ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$

Θετικά κριτήρια ολοκληρωσιμότητας:

Θ. [2.33]: $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$

Απόδειξη:

f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ $\Rightarrow$ f ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

(βλ. [Ne. I, Θ. 4.44], Σημ. ΑΛΙ, 9.1/8), δηλ.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in [\alpha, \beta] \text{ με } |x - y| < \delta : \; |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \qquad (1)$$

f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ $\left(\Rightarrow \forall\, [\alpha',\beta'] \subseteq [\alpha,\beta] : f \text{ συνεχής στο } [\alpha',\beta']\right)$

$\Rightarrow \forall\, [\alpha',\beta'] \subseteq [\alpha,\beta] : \exists \min f|_{[\alpha',\beta']}, \max f|_{[\alpha',\beta']} \in \mathbb{R}$ (2)

(βλ. [Νε. Ι, Θ. 4.30], Σημ. ΑΛΙ, 8.2/2,3)

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει η (1), και έστω

$P = \{x_0, \dots, x_\nu\} \in \mathcal{P}([\alpha,\beta])$ με $\|P\| < \delta$. Τότε, από την (2), $\forall\, k = 1, \dots, \nu$

$\exists\, \xi_k', \xi_k'' \in [x_{k-1}, x_k] : f(\xi_k') = \max f|_{[x_{k-1},x_k]}, f(\xi_k'') = \min f|_{[x_{k-1},x_k]}$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} f(\xi_k') - f(\xi_k'') < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$, αφού $|\xi_k' - \xi_k''| \leq x_k - x_{k-1} < \delta$

$\left[\text{χ.β.τ.γ. } x_{k-1} \leq \xi_k' \leq \xi_k'' \leq x_k \Rightarrow \xi_k'' - \xi_k' \leq x_k - x_{k-1}\right]$

$\Rightarrow U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{\nu} \left(f(\xi_k') - f(\xi_k'')\right)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} \sum_{k=1}^{\nu} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon$

και από την συνθήκη του Riemann ακολουθεί το αποδεικτέο. $\square$

Θ. [2.35]: $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη με πεπερασμένο αριθμό σημείων ασυνέχειας $\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$

Απόδειξη:

Έστω c_k, $k=1,\dots,\nu$ τα σημεία ασυνέχειας της f και $P=\{x_0,\dots,x_\nu\}\in \mathcal{P}([\alpha,\beta])$ με $c_k\in[x_{k-1},x_k]$. Τότε (βλ. Θ. [2.43] αργότερα):

f ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ $\Leftrightarrow$ $f|_{[x_{k-1},x_k]}$ ολοκληρώσιμες στα $[x_{k-1},x_k]$ $\forall k=1,\dots,\nu$. Συνεπώς, θέτοντας $\forall k=1,\dots,\nu$: $\alpha=x_{k-1}$, $\beta=x_k$, αρκεί να δείξουμε: $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη με μόνο ένα σημείο ασυνέχειας στο $[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$.

f φραγμένη $\Leftrightarrow$ $\exists K>0$: $|f(x)|\le K$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

Έστω $c\in[\alpha,\beta]$ το σημείο ασυνέχειας της f και έστω $\varepsilon>0$.

5-2/4

α) $c \in (\alpha,\beta)$: Θέτουμε $\eta := \min\left\{\frac{c-\alpha}{2}, \frac{\beta-c}{2}, \frac{\varepsilon}{12K}\right\} > 0$

$\Rightarrow \alpha < c-\eta < c < c+\eta < \beta$ $\left[c-\eta \geq c - \frac{c-\alpha}{2} = \frac{c+\alpha}{2} > \alpha,\ c+\eta \leq c + \frac{\beta-c}{2} = \frac{c+\beta}{2} < \beta\right]$

$\underset{\Theta.[2.33]}{\Rightarrow}$ $g := f|_{[\alpha, c-\eta]}$, $h := f|_{[c+\eta,\beta]}$ ολοκληρώσιμες στα

$[\alpha, c-\eta]$, $[c+\eta, \beta]$, αντίστοιχα

$\underset{\text{Συνθ. Riemann}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\ P \in \mathcal{P}([\alpha, c-\eta])$, $Q \in \mathcal{P}([c+\eta, \beta])$: $U(P,g) - L(P,g) < \frac{\varepsilon}{3}$,

$U(Q,h) - L(Q,h) < \frac{\varepsilon}{3}$,

$\Rightarrow$ Για $P^* := P \cup \{c-\eta, c+\eta\} \cup Q \in \mathcal{P}([\alpha,\beta])$ ισχύει

$$U(P^*, f) - L(P^*, f) = U(P,g) + \sup f|_{[c-\eta, c+\eta]} 2\eta + U(Q,h)$$
$$- L(P,g) - \inf f|_{[c-\eta,c+\eta]} 2\eta - L(Q,h) < \frac{2\varepsilon}{3} + 2K 2\eta \leq \varepsilon$$

$\underset{\text{Συνθ. Riemann}}{\Longleftrightarrow}$ f ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$

β) $c = \alpha$: Θέτουμε $\eta = \min\left\{\frac{\beta-\alpha}{2}, \frac{\varepsilon}{4K}\right\} > 0 \Rightarrow \alpha < \alpha+\eta < \beta$

$\underset{\text{Θ.[2.33]}}{\Longrightarrow}$ $\varphi := f|_{[\alpha+\eta,\beta]}$ ολοκληρώσιμη στο $[\alpha+\eta,\beta]$

$\underset{\text{Συνθ. Riemann}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, R \in \mathcal{P}([\alpha+\eta,\beta])$: $U(R,\varphi) - L(R,\varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ Για $R^* := \{\alpha\} \cup R$ ισχύει: $U(R^*, f) - L(R^*, f) =$

$= \sup f|_{[\alpha,\alpha+\eta]}\,\eta + U(R,\varphi) - \inf f|_{[\alpha,\alpha+\eta]}\,\eta - L(R,\varphi) < \frac{\varepsilon}{2} + 2K\eta \le \varepsilon$

$\underset{\text{Συνθ. Riemann}}{\Longleftrightarrow}$ f ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$

γ) $c = \beta$: Θέτουμε $\eta = \min\left\{\frac{\beta-\alpha}{2}, \frac{\varepsilon}{4K}\right\} > 0 \Rightarrow \alpha < \beta-\eta < \beta$

$\Rightarrow \psi := f|_{[\alpha,\beta-\eta]}$ ολοκλ. $\Longleftrightarrow \exists\, S \in \mathcal{P}([\alpha,\beta-\eta])$: $U(S,\psi) - L(S,\psi) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ Για $S^* := S \cup \{\beta\}$: $U(S^*, f) - L(S^*, f) = U(S,\psi) + \sup f|_{[\beta-\eta,\beta]}\,\eta$

$- L(S,\psi) - \inf f|_{[\beta-\eta,\beta]}\,\eta < \frac{\varepsilon}{2} + 2K\eta \le \varepsilon$ $\Rightarrow$ f ολοκλ. στο $[\alpha,\beta]$ $\square$

Θ. [2.38]: $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μονότονη $\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$

Απόδειξη:

Χβτγ f αύξουσα $\Rightarrow f(\alpha)\le f(\beta)$

Αν $f(\alpha)=f(\beta) \Rightarrow f(x)=f(\alpha)\ \forall x\in[\alpha,\beta]$ $[f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)=f(\alpha)\ \forall x\in(\alpha,\beta)]$

δηλ. f σταθερή $\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ (βλ. Παραδ. [2.13], Σημ. 4-1/14)

Αν $f(\alpha)<f(\beta)$, έστω $\varepsilon>0$ και $P=\{x_0,\dots,x_\nu\}\in\mathcal{P}([\alpha,\beta])$ με $\|P\|<\dfrac{\varepsilon}{f(\beta)-f(\alpha)}$

f αύξουσα $\Rightarrow \forall k=1,\dots,\nu:$ $\sup f|_{[x_{k-1},x_k]}=\max f|_{[x_{k-1},x_k]}=f(x_k)\le f(\beta)$

$\inf f|_{[x_{k-1},x_k]}=\min f|_{[x_{k-1},x_k]}=f(x_{k-1})\ge f(\alpha)$

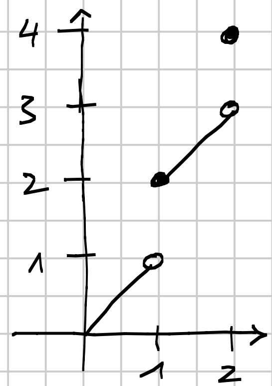
$$\Rightarrow U(P,f)-L(P,f)=\sum_{k=1}^{\nu}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)(x_k-x_{k-1})$$

$$<\frac{\varepsilon}{f(\beta)-f(\alpha)}\sum_{k=1}^{\nu}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)=\frac{\varepsilon}{f(\beta)-f(\alpha)}\big(f(\beta)-f(\alpha)\big)=\varepsilon$$

$\overset{\text{Συνθ. Riemann}}{\Longrightarrow}$ f ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ $\square$

15-2/7

A [2.7 α)] $f(x) = x + [x]$, $x \in [0,2]$, όπου $[x] \in \mathbb{Z}$ με $[x] \le x < [x]+1$ το ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,2]$ και να βρείτε το $U(P,f)$ θεωρώντας κατάλληλες διαμερίσεις λεπτότητας που τείνει στο μηδέν.



1: $$[x] = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x \in [1,2) \\ 2, & x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ x+1, & x \in [1,2) \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

με $x \le y \Rightarrow$ $f(x) = x \le y \le f(y)$ για $x, y \in [0,1)$

$f(x) = x+1 \le y+1 \le f(y)$ για $x,y \in [1,2)$

$f(x) = x < 1 < 2 \le y+1 = f(y) < 4 = f(2)$ για $x \in [0,1)$, $y \in [1,2)$

$\Rightarrow f$ αύξουσα στο $[0,2]$ $\underset{\theta.[2.38]}{\Rightarrow}$ f ολοκληρώσιμη στο $[0,2]$

Για $P = \left\{ \frac{k}{\nu} : k = 0, \dots, \nu \right\} \cup \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\nu} : \lambda = 1, \dots, \nu \right\}$ έχουμε $U(P,f) =$

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{\nu} f\left(\frac{k}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \sum_{\lambda=1}^{\nu} f\left(1+\frac{\lambda}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{\mu=1}^{\nu}\left(f\left(\frac{\mu}{\nu}\right) + f\left(1+\frac{\mu}{\nu}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\nu}\left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\left(\frac{\mu}{\nu} + 1 + \frac{\mu}{\nu}\right) + 2 + 4\right) = \frac{1}{\nu}\left(5 + \nu + \frac{2}{\nu}\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\mu\right) = \frac{1}{\nu}\left(5 + \nu + 2(\nu-1)\right) = 3 + \frac{3}{\nu}.$$

A [2.8] i) Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες [5-218]

α) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} , & 0 < x \leq 1 \\ k , & x = 0 \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$

Λ: Ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, ως φραγμένη με $|f(x)| \leq \max\{1, |k|\}$ $\forall x \in [0,1]$ και συνεχής στο $(0,1]$ ($\Rightarrow$ ένα μόνο σημείο ασυνέχειας, το $x=0$)

β) $f(x) = \begin{cases} e^{\sin\frac{1}{x}} , & 0 < x \leq 1 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$

Λ: Ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ ως φραγμένη με $|f(x)| \leq e$ $\forall x \in [0,1]$ και συνεχής (ως σύνθεση συνεχών) στο $(0,1]$

γ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} , & 0 \leq x \leq 1 \\ (7x-6)^{-\frac{1}{3}} , & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Λ.: Ολοκληρώσιμη στο $[0,2]$ ως φραγμένη με $|f(x)| \leq 1$ $\forall x \in [0,2]$ και συνεχής στα $[0,1]$ και $(1,2]$

δ) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Λ.: Μη ολοκληρώσιμη, ως μη φραγμένη, αφού $f(x) \xrightarrow[x \to 0+]{} \infty$

ii) Για ποιές τιμές του $k \in \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες οι παρακάτω συναρτήσεις;

α) $f(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}\left(x^k \sin\frac{\pi}{x}\right), & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Λ.: $k=0$: $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)$, $x \neq 0$: Μη ολοκλ. στο $[0,1]$, ως μη φραγμένη, αφού $f\left(\frac{1}{2\nu}\right) = -4\pi\nu^2 \to -\infty$ για $\nu \to \infty$ $(\nu \in \mathbb{N})$

$k \neq 0$: $f(x) = k x^{k-1} \sin\frac{\pi}{x} - \pi x^{k-2} \cos\frac{\pi}{x}$, $x \neq 0$:
Μη ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ για $k<2$ ως μη φραγμένη, αφού $f\left(\frac{1}{2\nu}\right) = -\pi\, 2^{k-2}\, \nu^{2-k} \to -\infty$ για $\nu \to \infty$ $(\nu \in \mathbb{N})$

Ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ για $k \geq 2$, ως φραγμένη με $|f(x)| \le k + \pi$ $\forall x \in [0,1]$ και συνεχής στο $(0,1]$

$\Longrightarrow$ Ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ για $k \geq 2$.

β) $f(x) = \begin{cases} x^{-k} , & x \in (0,1] \\ \alpha , & x = 0 \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Λ.: Μη ολοκληρώσιμη για $k>0$, ως μη φραγμένη, αφού $f\left(\frac{1}{\nu}\right) = \nu^{k} \xrightarrow[\mathbb{N} \ni \nu \to \infty]{} \infty$

Ολοκληρώσιμη για $k \leq 0$ ως φραγμένη με $|f(x)| \leq \max\{1, |\alpha|\}$ $\forall x \in [0,1]$ και συνεχής στο $(0,1]$.

$\Rightarrow$ Ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ για $k \leq 0$.