[§2.7] Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Θ. [2.53] $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta] \Rightarrow$ η $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $F(x) := \int_\alpha^x f(t)\,dt$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

Απόδειξη:

Η $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση, αφού $\forall x\in(\alpha,\beta]$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,x]$, δηλ. $\exists\ F(x) := \int_\alpha^x f(t)\,dt \in\mathbb{R}$ (το οποίο ορίζεται μοναδικά). Επίσης για $x=\alpha$: $F(\alpha) := \int_\alpha^\alpha f(t)\,dt := 0\in\mathbb{R}$.

Έστω $x,y\in[\alpha,\beta]$, $\alpha<x<y$. Τότε $F(y)-F(x) = \int_\alpha^y f(t)\,dt - \int_\alpha^x f(t)\,dt$

$$\underset{\Theta.[2.43]}{=} \int_\alpha^x f(t)\,dt + \int_x^y f(t)\,dt - \int_\alpha^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt,$$

το οποίο ισχύει και για $x=\alpha$ (αφού $F(\alpha)=0$) και για $x=y$ (αφού $\int_x^x f(t)\,dt=0$)

και για $y<x$ (αφού $\int_y^x f(t)\,dt =: -\int_x^y f(t)\,dt$)

$\Rightarrow \forall x,y\in[\alpha,\beta] : |F(y)-F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \underset{\theta.[2.45]}{\leq} \begin{cases} \int_x^y |f(t)|\,dt, & x\leq y \\ \int_y^x |f(t)|\,dt, & x>y \end{cases}$ (1)

f ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$ f φραγμένη $\Leftrightarrow \exists K>0 \; |f(x)|\leq K \;\forall x\in[\alpha,\beta]$

$\underset{\theta.[2.44]\beta)}{\Longrightarrow} \int_x^y |f(t)|\,dt \leq K(y-x)$ για $x\leq y$, $\int_y^x |f(t)|\,dt \leq K(x-y)$ για $x>y$

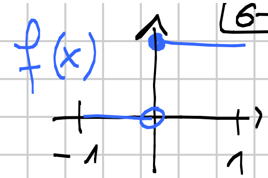
$\underset{(1)}{\Longrightarrow} \forall x,y\in[\alpha,\beta] : |F(y)-F(x)| \leq K|y-x|$, δηλ. η F είναι Lipschitz

και άρα ομοιόμορφα συνεχής, αφού $\forall \varepsilon>0 \;\exists \delta=\frac{\varepsilon}{K}>0 \;\forall x,y\in[\alpha,\beta]$

με $|x-y|<\delta$: $|F(x)-F(y)| \leq K|x-y| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. $\square$

6–2/3

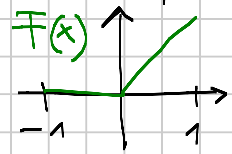
Παραδ. [2.54] $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 0\\ 1, & 0<x\le 1\end{cases}$



$\Rightarrow$ f συνεχής στα $[-1,0)$, $(0,1]$, φραγμένη με $|f(x)|\le 1$ $\forall x\in[-1,1]$

$\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]$ $\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη στο $[-1,x]$

$\forall x\in[-1,1]$ με $F(x):=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases}0, & x\in[-1,0]\\ x, & x\in(0,1]\end{cases}$,



αφού $F(-1)=\int_{-1}^{-1} f(t)\,dt := 0$, $\forall x\in(-1,0]: F(x)=\int_{-1}^{x} 0\,dt \underset{[\Pi\delta.\,2.13]}{=} 0$,

$\forall x\in(0,1]: F(x)=\int_{-1}^{0} 0\,dt+\int_{0} 1\,dt = 0+1\cdot(x-0)=x$.

Η f δεν είναι συνεχής στο 0, ενώ η F είναι συνεχής στο $[-1,1]$, και άρα και ομοιόμορφα συνεχής, και παραγωγίσιμη στα $[-1,0)$, $(0,1]$ ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Θ. [2.54] $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$, f συνεχής στο $x_0\in[\alpha,\beta]$

$\Rightarrow$ η $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, $F(x):=\int_\alpha^x f(t)\,dt$, είναι παραγωγίσιμη στο x_0

και $F'(x_0)=f(x_0)$.

6-2/4

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon>0$. f συνεχής στο $x_0\in[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ $\exists\,\delta>0$ $\forall\, t\in[\alpha,\beta]$ με $|t-x_0|<\delta$

$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$, δηλ. $f(x_0)-\varepsilon<f(t)<f(x_0)+\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\forall\, x\in[\alpha,\beta]$ με $x\in(x_0,x_0+\delta)$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}(f(x_0)-\varepsilon)\,dt}_{=(f(x_0)-\varepsilon)(x-x_0)}<\underbrace{\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt}_{=F(x)-F(x_0)}<\underbrace{\int_{x_0}^{x}(f(x_0)+\varepsilon)\,dt}_{=(f(x_0)+\varepsilon)(x-x_0)}\iff\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

και $\forall\, x\in[\alpha,\beta]$ με $x\in(x_0-\delta,x_0)$.

$$(f(x_0)-\varepsilon)(x_0-x)<\underbrace{\int_{x}^{x_0}f(t)\,dt}_{=F(x_0)-F(x)}<(f(x_0)+\varepsilon)(x_0-x)\iff\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

$\square$

Πόρισμα: $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής $\Longrightarrow$ $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, $F(x):=\int_\alpha^x f(t)\,dt$, παραγωγίσιμη και $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

Θ. [2.60]

$f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Τότε

$$\int_\alpha^x f(t)\,dt = G(x)-G(\alpha)\ \ \forall x\in[\alpha,\beta] \iff G'(x)=f(x)\ \ \forall x\in[\alpha,\beta]$$

Απόδειξη:

Θέτουμε $F(x):=\int_\alpha^x f(t)\,dt$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

"$\Rightarrow$": $\forall x\in[\alpha,\beta]$: $F(x)=G(x)-G(\alpha) \underset{\text{Πόρισμα}}{\Longrightarrow} G'(x)=F'(x)=f(x)$.

"$\Leftarrow$": $\forall x\in[\alpha,\beta]$: $G'(x)=f(x)\underset{\text{Πόρισμα}}{=}F'(x) \underset{(*)}{\Longrightarrow} \exists\, c\in\mathbb{R}: G(x)=F(x)+c$

$\Longrightarrow G(\alpha)=c \Longrightarrow F(x)=G(x)-G(\alpha)$

(*) [Ne.I, Θ.5.56]: $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (α,β),

$f'(x)=0\ \forall x\in(\alpha,\beta) \Rightarrow f(x)=f(\alpha)\ \forall x\in[\alpha,\beta]$ $\boxed{6\text{-}2/6}$

Απόδειξη: ΘΜΤ: $\forall x\in(\alpha,\beta]\ \exists\, \xi\in(\alpha,x): f(x)-f(\alpha)=f'(\xi)(x-\alpha)=0$

[Πόρισμα]: $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς, παραγωγίσιμες στο (α,β),

$f'(x)=g'(x)\ \forall x\in(\alpha,\beta) \Rightarrow \exists\, c=f(\alpha)-g(\alpha): f(x)=g(x)+c\ \forall x\in[\alpha,\beta]$

Απόδειξη: $h:=f-g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (α,β),

$h'(x)=0\ \forall x\in(\alpha,\beta) \underset{\text{Θεώρημα}}{\Longrightarrow} h(x)=h(\alpha)\ \forall x\in[\alpha,\beta]$ $\square$

Πόρισμα: $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παράγουσα της f
(δηλ. $G'(x)=f(x)\ \forall x\in[\alpha,\beta]$) $\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = G(\beta)-G(\alpha)$

Απόδειξη: $x=\beta$ στο αριστερό μέρος της ισοδυναμίας στο ΘΘΑΛ. $\square$

Θ.[2.65] (Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)

$f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, $G : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παράγουσα της f

$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\, dx = G(\beta) - G(\alpha) =: G(x)\Big|_{x=\alpha}^{\beta}$ (τύπος των Newton-Leibniz)

Απόδειξη:

6-2/7

Έστω $P = \{x_0, \dots, x_\nu\} \in \mathcal{P}([\alpha, \beta])$. ΘΜΤ: $\forall k = 1, \dots, \nu \ \exists \ \xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$

$$G(x_k) - G(x_{k-1}) = G'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$\Rightarrow G(\beta) - G(\alpha) = \sum_{k=1}^{\nu} \left(G(x_k) - G(x_{k-1}) \right) = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = S(P, f, \Xi)$$

για την επιλ. ενδ. σημ. $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_\nu\}$ της P (1)

f ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow \exists \ A =: \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall P \in \mathcal{P}([\alpha, \beta])$ με $\|P\| < \delta$

$\forall$ επιλ. ενδ. σημ. Ξ της P: $|S(P, f, \Xi) - A| < \varepsilon$ (2)

$$(1), (2) \underset{(**)}{\Longrightarrow} A = A^* := G(\beta) - G(\alpha)$$

(**): Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\forall P \in \mathcal{P}([\alpha,\beta])$ με $\|P\| < \delta$ και $\delta > 0$ όπως στο (2) και την επιλ. ενδ. σημ. Ξ της P όπως στο (1): $|A^* - A| < \varepsilon$. $\boxed{6\text{-}2/8}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : |A - A^*| < \varepsilon \Leftrightarrow A = A^*$

[$\Rightarrow$: Αν $A \neq A^*$, τότε για $\varepsilon = \frac{|A-A^*|}{2} > 0$ θα είχαμε $|A - A^*| < \frac{|A-A^*|}{2}$, άτοπο]

$\square$

Πόρισμα: $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, $f' : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη

$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = f(\beta) - f(\alpha)$

Σύνοψη (Σχέση μεταξύ παράγουσας και ορισμένου ολοκληρώματος συνάρτησης):

α) $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \exists$ παράγουσα $F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ της f,

η $F(x) := \int_\alpha^x f(t)\,dt$ (Πορ. Θ. [2.54])

$\boxed{6\text{-}2/9}$

β) $\exists\ f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ασυνεχής και ολοκληρώσιμη με παράγουσα την

$F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int_\alpha^x f(t)\,dt$,

π.χ. η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

που είναι φραγμένη με $|f(x)| \leq 3\ \forall x \in [0, 1]$ και συνεχής στο $(0, 1]$

και έχει παράγουσα την $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

με $G(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt =: F(x)\ \forall x \in [0, 1]$ ((Πορ.) Θ. [2.65]).

γ) $\exists\ f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μη ολοκληρώσιμη που έχει παράγουσα

$G : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$

($\Leftrightarrow$ $\exists\, G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $G' = f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μη ολοκληρώσιμη),

π.χ. η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

δεν είναι φραγμένη, αφού $f\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\right) = -2\sqrt{2\pi\nu}\to-\infty$, αλλά έχει

παράγουσα την $G:[0,1]\to\mathbb{R}$, $G(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

δ) $\exists\, f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (ακόμα και με παραγωγίσιμη $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, $F(x):=\int_\alpha^x f(t)\,dt$) που δεν έχει παράγουσα,

π.χ. η $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 0, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$, με $F(x)=0$ $\forall x\in[-1,1]$

[αφού για $x\in[-1,0)$: $F(x)=0$, για $P_\nu=\left\{x_k^{(\nu)}=-1+\frac{k}{\nu} : k=0,\dots,\nu\right\}$

$L(P_\nu, f|_{[-1,0]})=0$, $U(P_\nu, f|_{[-1,0]})=\frac{1}{\nu}$ $\Rightarrow$ $F(0)=0$ (Πορ. Θ.[2.19])

για $x\in(0,1]$, $Q_\nu=\left\{x_k^{(\nu)}=x\frac{k}{\nu} : k=0,\dots,\nu\right\}$: $L(Q_\nu, f|_{[0,x]})=0$,

$\mathcal{U}(Q_\nu, f|_{[0,x]}) = \frac{x}{\nu} \implies F(x) = 0$ (Πορ. Θ. [2.19])]
δεν έχει παράγουσα, αφού αν είχε θα έπρεπε να έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών (Θ. Darboux του Διαφορικού Λογισμού, βλ. [Ντ. I, Θ. 5.39] ή [Ντ. II, σελ. 2, Υποσημείωση 1]).
[Βλέπουμε ότι η $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ γενικά δεν δίνει μονοσήμαντα την f, ενώ την δίνει για f συνεχείς ("$\Rightarrow$" στο Θ. [2.60])]

Συγκρατούμε:

$\boxed{\text{Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, δηλ. ο τύπος των Newton-Leibniz, ισχύει γενικά μόνο για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που έχουν παράγουσα.}}$