Εβδομάδα 13η / Επαναληπτικές Ασκήσεις / 20., 21. 6. 2012 E-2/1

Notiztitel 19.06.2012

Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα:

α) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-4x+3)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-((x-2)^2-1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$$

$$\underset{y=x-2}{=} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{Arcsin} y + c = \operatorname{Arcsin}(x-2) + c$$

β) $$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}\,dx \underset{y=\sin x}{=} \int \frac{dy}{(1-y^2)^2}$$

$$= \int \frac{dy}{(1-y)^2(1+y)^2}$$

όπου $$\frac{1}{(1-y)^2(1+y^2)} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{(1-y)^2} + \frac{C}{1+y} + \frac{D}{(1+y)^2}$$

$$\Rightarrow 1 = A(1-y)(1+y)^2 + B(1+y)^2 + C(1-y)^2(1+y) + D(1-y)^2$$ E-2/2

$$\Rightarrow 1 = A + B + C + D, \quad 1 = B4, \quad 1 = D4, \quad 1 = -A9 + B9 + C3 + D$$

$$\Rightarrow A + C = \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = -A9 + C3 = (-A3 + c)3 = \left(-A4 + \frac{1}{2}\right)3$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{4}, \quad D = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-y)^2(1+y)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{(1-y)^2(1+y)^2} = \frac{1}{4}\left(\int \frac{dy}{1-y} + \int \frac{dy}{(1-y)^2} + \int \frac{dy}{1+y} + \int \frac{dy}{(1+y)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\ln|y-1| - \frac{1}{y-1} + \ln|y+1| - \frac{1}{y+1}\right) + c = \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| + \frac{2y}{1-y^2}\right) + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + c$$

$\gamma)\quad \int \frac{dx}{5+4\sin x}$

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' = \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)' = \frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right) \Rightarrow dx = \frac{2}{(1+t^2)}\,dt$$

$$\left[\text{ή}\quad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\operatorname{Arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt\right]$$

$$\sin x = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2t\,\frac{1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{5+4\sin x} \underset{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{5+4\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int\frac{2}{5(1+t^2)+8t}\,dt$$

$$= \frac{2}{5}\int\frac{dt}{1+t^2+\frac{8}{5}t} = \frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{25}{9}\int\frac{dt}{\left(\frac{5}{3}t+\frac{4}{3}\right)^2+1}$$

$$\underset{y=\frac{5}{3}t+\frac{4}{3}}{=} \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}\int\frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{3}\operatorname{Arctg}\left(\frac{5}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{4}{3}\right)+C$$

$$\delta)\quad \int \frac{x+1}{\sqrt{-3x-x^2}}\,dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{-(x^2+3x)}}\,dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{-\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)}}\,dx$$

$$= \int \frac{x+1}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{x+1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x+1\right)^2}}\,dx$$

$$= -\frac{3}{4}\int \frac{-2\left(\frac{2}{3}x+1\right)\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x+1\right)^2}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x+1\right)^2}}\,dx$$

$$= -\frac{3}{4}\;2\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x+1\right)^2} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{3}x+1\right)+c$$

$$= -\sqrt{-x^2-3x} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{3}x+1\right)+c$$

$$\varepsilon)\ \int \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2(1+x^2)}\,dx \qquad [\ \operatorname{Arctan} = \operatorname{Arctg}\ ]$$

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} - \operatorname{Arctan} x + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2(1+x^2)}\,dx = -\left(\frac{1}{x} + \operatorname{Arctan} x\right)\operatorname{Arctan} x + \int \left(\frac{1}{x} + \operatorname{Arctan} x\right)\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= -\frac{\operatorname{Arctan} x}{x} - \operatorname{Arctan}^2 x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} + \int \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

$$\int \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctan}^2 x - \int \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}^2 x + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2(1+x^2)}\,dx = -\frac{\operatorname{Arctan} x}{x} - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}^2 x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

Α.: Να εξετάσετε για ποιά $\alpha \in \mathbb{R}$ συγκλίνει το γ.ο. $\int_0^\infty \sin(e^{\alpha x})\,dx$

Λ.: $\alpha = 0 \Rightarrow \sin(e^{0x}) = \sin 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^\infty \sin 1 \, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \sin 1 \, dx$

$$= \sin 1 \lim_{t\to\infty} x \Big|_0^t = \sin 1 \lim_{t\to\infty} t \underset{\sin 1 > 0}{=} \infty$$

$\alpha \neq 0$: $\int_0^\infty \sin(e^{\alpha x})\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \sin(e^{\alpha x})\,dx$

$$\underset{y=\alpha x}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha t} \sin(e^y)\,dy \underset{\alpha t = s}{=} \begin{cases} \lim_{s\to\infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^s \sin(e^y)\,dy, & \alpha > 0 \\ \lim_{s\to-\infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^s \sin(e^y)\,dy, & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \sin(e^y)\,dy, & \alpha > 0 \\ \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^0 \sin(e^y)\,dy, & \alpha < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \sin(e^y)\,dy, & \alpha > 0 \\ \frac{1}{|\alpha|} \int_0^\infty \sin(e^{-y})\,dy, & \alpha < 0 \end{cases}$$

αφού $\int_{-\infty}^0 \sin(e^y)\,dy = \lim_{s\to-\infty} \int_s^0 \sin(e^y)\,dy \underset{z=-y}{=} \lim_{s\to-\infty} \int_{-s}^0 \sin(e^{-z})(-1)\,dz$

$$= \lim_{-s\to\infty} \int_0^{-s} \sin(e^{-z})\,dz = \int_0^\infty \sin(e^{-z})\,dz$$

[για $\alpha<0$ θα μπορούσαμε να κάνουμε και κατευθείαν το εξής:

$$\int_0^\infty \sin(e^{\alpha x})\,dx = \int_0^\infty \sin(e^{-|\alpha| x})\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \sin(e^{-|\alpha|x})\,dx$$

$$\underset{y=|\alpha|x}{=} \frac{1}{|\alpha|}\lim_{t\to\infty}\int_0^{|\alpha|t}\sin(e^{-y})\,dy = \frac{1}{|\alpha|}\int_0^\infty \sin(e^{-y})\,dy \;]$$

Τώρα, $\int_0^\infty \sin(e^y)\,dy \underset{z=e^y}{=} \int_1^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz$ συγκλίνει (υπό συνθήκη), αφού $\varphi(z)=\frac{1}{z}$ φθίνουσα, $\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=0$, φ συνεχώς παραγωγίσιμη (Θ. [3.42]) (και $\int_1^\infty \frac{dz}{z}=\infty$, βλ. p-ολοκληρώματα).

$$\int_0^\infty \sin(e^{-y})\,dy \underset{z=e^y}{=} \int_1^\infty \frac{\sin(\frac{1}{z})}{z}\,dz = \int_1^\infty \frac{|\sin(\frac{1}{z})|}{z}\,dz < \infty,$$ αφού

$$\lim_{z\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{z}}{z}\right)\Big/\frac{1}{z^2} = \lim_{z\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}} = 1$$ και $\int_1^\infty \frac{1}{z^2}\,dz<\infty$ (Ορ. Κριτ. Σύγκρ.)

[Εναλλ.: $\int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{z}}{z}\,dz = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\sin\frac{1}{z}}{z}\,dz \underset{u=\frac{1}{z}}{=} \lim_{t\to\infty}\int_{\frac{1}{t}}^1 \frac{\sin u}{u}\,du = \int_0^1 \frac{\sin u}{u}\,du \in \mathbb{R}$]

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Ιούνιος 2011

1.α) Να δώσετε τον ορισμό του αθροίσματος Riemann, ορίζοντας αναλυτικά το κάθε τι, και με την βοήθειά του να δώσετε τον ορισμό της ολοκληρώσιμης κατά Riemann συνάρτησης.

Λύση:

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, $P=\{\alpha=x_0, x_1, \dots, x_\nu=\beta\}$ μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$, δηλ. $P\in\mathcal{P}([\alpha,\beta])$, όπου $x_{k-1}<x_k$ $\forall k=1,\dots,\nu$ και $\Xi=\{\xi_k : k=1,\dots,\nu\}$, όπου $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ $\forall k=1,\dots,\nu$, μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων της P. Το άθροισμα Riemann της f ως προς την διαμέριση P και την επιλογή ενδ. σημ. Ξ

ορίζεται ως $S(P, f, \Xi) := \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

Η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ λέγεται (κατά Riemann) ολοκληρώσιμη (στο $[\alpha, \beta]$), αν $\exists\, A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ $\forall P \in \mathcal{P}([\alpha, \beta])$ με λεπτότητα $\|P\| := \max\{x_k - x_{k-1} : k = 1, \dots, \nu\}$ $< \delta$ και $\forall$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ της P:

$| S(P, f, \Xi) - A | < \varepsilon$.

Το $A \in \mathbb{R}$ αυτό είναι μοναδικό, λέγεται ορισμένο (κατά Riemann) ολοκλήρωμα της $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ (στο $[\alpha, \beta]$) και συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx := A$.

1.β) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσατε στο α), τότε αυτή είναι φραγμένη.

Απόδειξη: $\boxed{E\text{-}2/10}$

Νε. II, Θ. [2.27] (Σημ. 5-1/6,7 ή E-1/49-51)

1.γ) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσατε στο α), και P μια τυχούσα διαμέριση του $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι(*) υπάρχει σύνολο ενδιάμεσων σημείων Ξ_1 της P, τέτοιο ώστε $|U(P,f)-S(P,f,\Xi_1)|<\varepsilon$ [(*) $\forall \varepsilon>0$]

Απόδειξη:

Έστω $P=\{x_0=\alpha, x_1, \dots, x_\nu=\beta\}$, $\nu\in\mathbb{N}$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη είναι και φραγμένη (βλ. β)), δηλ. $\exists\ \sup f, \inf f\in\mathbb{R}$, και άρα

$\exists \ \sup f|_{[x_{k-1},x_k]}$, $\inf f|_{[x_{k-1},x_k]} \in \mathbb{R} \quad \forall k=1,\dots,\nu$ [και μάλιστα

$\inf f \le \inf f|_{[x_{k-1},x_k]} \le \sup f|_{[x_{k-1},x_k]} \le \sup f \quad \forall k=1,\dots,\nu$]

Συνεπώς, από τον ορισμό του supremum

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \ \xi_k' \in [x_{k-1},x_k] : \sup f|_{[x_{k-1},x_k]} - \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} < f(\xi_k') \le \sup f|_{[x_{k-1},x_k]}$

ή, ισοδύναμα, $0 \le \sup f|_{[x_{k-1},x_k]} - f(\xi_k') < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$

$\Rightarrow$ Για $\Xi_1 := \{\xi_k' : k=1,\dots,\nu\}$: $U(P,f) - S(P,f,\Xi_1) =$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} \sup f|_{[x_{k-1},x_k]} (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k')(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} \left(\sup f|_{[x_{k-1},x_k]} - f(\xi_k') \right) \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{>0} < \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(x_k - x_{k-1})$$

$$= \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} \sum_{k=1}^{\nu} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(x_\nu - x_0) = \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha) = \varepsilon$$

και $U(P,f) - S(P,f,\Xi_1) = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\sup f|_{[x_{k-1},x_k]} - f(\xi_k') \right)(x_k - x_{k-1}) \ge 0$

1. δ) Να εξετάσετε αν συγκλίνει το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} x\cos x\,dx$ και αν υπάρχει η πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy.

Λύση: $\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x\cos x\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x\cos x\,dx + \lim_{s\to\infty}\int_{-s}^0 x\cos x\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}(t\sin t+\cos t-1) + \lim_{s\to\infty}\Big(1-\underbrace{(-s)\sin(-s)}_{=s\sin s}-\underbrace{\cos(-s)}_{=\cos s}\Big)$$

$$= \lim_{t\to\infty}(t\sin t+\cos t-1) - \lim_{s\to\infty}(s\sin s+\cos s-1)$$

Αλλά το όριο αυτό δεν υπάρχει, αφού π.χ. για $t_\nu = \frac{\pi}{2}(4\nu+1) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \infty$ έχουμε $\lim_{t_\nu\to\infty}(t_\nu\sin t_\nu+\cos t_\nu-1) = \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}(4\nu+1)-1\right)=\infty$

ενώ για $t_\nu = \frac{\pi}{2}(4\nu-1)$ έχουμε $\lim\limits_{t_\nu\to\infty}(t_\nu \sin t_\nu + \cos t_\nu - 1) =$

$= \lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}(4\nu-1)(-1) - 1\right) = -\infty .$

Η πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy είναι $C.P.V. \int_{-\infty}^{\infty} x\cos x\,dx$

$:= \lim\limits_{t\to\infty} \underbrace{\int_{-t}^{t} x\cos x\,dx}_{=0} = 0$, αφού $x\cos x$ περιττή συνάρτηση.

2. α) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $|f'(x)|\leq M$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Ν.δ.ο. η f ικανοποιεί την συνθήκη του Riemann.

Απόδειξη: Θεωρούμε τις διαμερίσεις $P_\nu=\{x_k=\alpha+(\beta-\alpha)\frac{k}{\nu}:k=0,\dots,\nu\}$ σε ν ίσα τμήματα. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, θα είναι και συνεχής σε κάθε $[x_{k-1},x_k]$ και άρα θα παίρνει μέγιστο στο $\xi_k'\in[x_{k-1},x_k]$ και ελάχιστο στο $\xi_k''\in[x_{k-1},x_k]$ για τα οποία θα ισχύει $\sup f|_{[x_{k-1},x_k]}-\inf f|_{[x_{k-1},x_k]}=$

$$=f(\xi_k')-f(\xi_k'')\underset{\text{ΘΜΤ}}{=}f'(\xi_k)(\max\{\xi_k',\xi_k''\}-\min\{\xi_k',\xi_k''\})$$

$$=|f'(\xi_k)||\dots|\leq M(x_k-x_{k-1})=M(\beta-\alpha)\frac{1}{\nu}\text{, όπου }\xi_k\in(\min\{\dots\},\max\{\dots\})$$

$$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\nu\in\mathbb{N}:U(P_\nu,f)-L(P_\nu,f)=\sum_{k=1}^{\nu}(f(\xi_k')-f(\xi_k''))(x_k-x_{k-1})$$

$\leq M(\beta-\alpha)^2\frac{1}{\nu}<\varepsilon$, δηλ. το αποδεικτέο (β' Μορφή της συνθήκης Riemann)

E-2/15

2.β) Έστω $\alpha>1$ και $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in[1,\alpha]$. Θεωρώντας τη διαμέριση

$$P_\nu=\{1,\alpha^{\frac{1}{\nu}},\dots,\alpha^{\frac{\nu}{\nu}}\}$$

να υπολογίσετε το $L(P,f)$ και το Lf.

Λύση: $P_\nu=\{x_k=\alpha^{\frac{k}{\nu}} : k=0,\dots,\nu\}$, f φθίνουσα

$$\Rightarrow L(P_\nu,f)=\sum_{k=1}^{\nu}\inf f|_{[x_{k-1},x_k]}(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{\nu}f(x_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{\nu}f(\alpha^{\frac{k}{\nu}})\left(\alpha^{\frac{k}{\nu}}-\alpha^{\frac{k-1}{\nu}}\right)=\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{\alpha^{\frac{k}{\nu}}}\left(\alpha^{\frac{k}{\nu}}-\alpha^{\frac{k-1}{\nu}}\right)=\sum_{k=1}^{\nu}1\left(1-\alpha^{-\frac{1}{\nu}}\right)$$

$$=\nu\left(1-\alpha^{-\frac{1}{\nu}}\right)=g\left(\tfrac{1}{\nu}\right),\ \text{όπου}\ g(x)=\frac{1-\alpha^{-x}}{x}=\frac{1-e^{-x\ln\alpha}}{x},$$

και αφού $\lim_{x\to0+}g(x)=\left(\lim_{x\to0+}\frac{1}{e^{x\ln\alpha}}\right)\ln\alpha\lim_{x\to0+}\frac{e^{x\ln\alpha}-1}{x\ln\alpha}=\ln\alpha$

και $\frac{1}{\nu}\to0$ για $\nu\to\infty$, έχουμε $\lim_{\nu\to\infty}L(P_\nu,f)=\ln\alpha$

$= \sup\{ L(P_\nu, f) : \nu \in \mathbb{N} \}$, αφού $g'(x) = \dfrac{\ln\alpha\, e^{-x\ln\alpha}\, x - (1 - e^{-x\ln\alpha})}{x^2}$

$$= \frac{e^{-x\ln\alpha}(x\ln\alpha + 1) - 1}{x^2} = \frac{e^{-\xi\ln\alpha}\big((-\ln\alpha)(\xi\ln\alpha + 1) + \ln\alpha\big)}{x^2}$$

E-2/16

$$= \frac{-\xi(\ln\alpha)^2 e^{-\xi\ln\alpha}}{x^2} < 0$$ με κάποιο $\xi \in (0, x)$.

Αφού $\{L(P_\nu, f) : \nu \in \mathbb{N}\} \subset \{L(P, f) : P \in \mathcal{P}([1, \alpha])\}$, έχουμε σίγουρα $\ln\alpha = \sup\{L(P_\nu, f) : \nu \in \mathbb{N}\} \leq L_f := \sup\{L(P, f) : P \in \mathcal{P}([1, \alpha])\}$.

Αλλά, αφού η f ως συνεχής είναι και ολοκληρώσιμη στο $[1, \alpha]$, από την συνθήκη του Riemann (Α΄ Μορφή), $\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu \geq \nu_0$: $U(P_\nu, f) - L(P_\nu, f) < \varepsilon$, δηλ. $\lim_{\nu\to\infty}\big(U(P_\nu, f) - L(P_\nu, f)\big) = 0$, και συνεπώς $\lim_{\nu\to\infty} U(P_\nu, f) = \ln\alpha \geq U_f = L_f$, και άρα $L_f = \ln\alpha = U_f = \int_1^\alpha \frac{dx}{x}$, το οποίο επιβεβαιώνεται από το ΘΘΑΛ $\int_1^\alpha \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^\alpha = \ln\alpha$.

2.γ) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση το γεν. ολ. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sin x|+|\cos x|}{|x|+1}dx$

Λύση: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sin x|+|\cos x|}{|x|+1}dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{|\sin x|+|\cos x|}{x+1}dx$

$\geq 2\int_{0}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x+1}dx = \infty$, αφού $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x+1} = \int_{1}^{\infty}\frac{dy}{y} = \infty$

(Θ. [3.42 ii)] και p-ολοκλήρωμα)

3. α) Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ θα λέγεται αντιπεριοδική με αντιπερίοδο $T>0$, αν $f(x)+f(x+T)=0 \ \forall x\in\mathbb{R}$. Ν.δ.ο. αν η f είναι αντιπεριοδική, με αντιπερίοδο T, τότε και η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^T f(t)\,dt$ είναι επίσης αντιπεριοδική με αντιπερίοδο T.

$\boxed{\text{Ε-2/18}}$

Απόδειξη:

$$g(x)+g(x+T)=\int_0^x f(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^T f(t)\,dt+\int_0^{x+T} f(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^T f(t)\,dt$$

Αφού $\int_0^x f(t)\,dt=-\int_0^x f(t+T)\,dt \underset{s=t+T}{=} -\int_T^{x+T} f(s)\,ds$

και $\int_0^{x+T} f(t)\,dt=\int_0^T f(t)\,dt+\int_T^{x+T} f(t)\,dt$, έχουμε

$$g(x)+g(x+T)=-\cancel{\int_T^{x+T}} f(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^T \cancel{f(t)}\,dt+\int_0^T \cancel{f(t)}\,dt$$
$$+\cancel{\int_T^{x+T}} f(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^{\cancel{T}} f(t)\,dt$$
$$=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

3. β) Να βρεθούν οι τιμές $f(4)$ και $g(9)$ αν

$$\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\cos(\pi x) = \int_0^{g(x)} t^2\,dt,$$

όπου f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,\infty)$.

Λύση: Αφού f συνεχής, έχει παράγουσα την $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$

$$\forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} f(t)\,dt\right) = \frac{d}{dx} F(x^2) = F'(x^2)\,2x = f(x^2)\,2x$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x\cos(\pi x)\right) = \cos(\pi x) - \pi x \sin(\pi x)$$

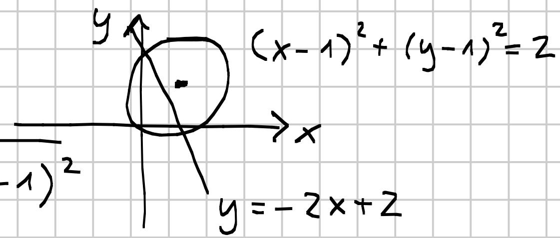
$$\Rightarrow f(4)\,4 = \cos(\pi 2) - 2\pi \sin(\pi 2) = \cos(\pi 2) = 1 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{4}$$

Επίσης, $\displaystyle\int_0^{g(x)} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{g(x)} = \frac{g(x)^3}{3} = x\cos(\pi x)$

$$\Rightarrow g(9)^3 = 3\cdot 9\cos(\pi 9) \Rightarrow g(9) = 3\left(\cos(\pi 9)\right)^{\frac{1}{3}}$$

3. γ) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(1,0)$ χωρίζει τον κύκλο με κέντρο $K(1,1)$ και ακτίνα $\sqrt{2}$ σε δύο μέρη. Να εκφράσετε το εμβαδό του μικρότερου μέρους με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων. Στη συνέχεια να υπολογίσετε ένα από τα άρρητα ολοκληρώματα. (Να κάνετε σχήμα.)

Λύση: Ο κύκλος δίνεται από την εξίσωση $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ και η ευθεία από την $y=\alpha x+\beta$ με $2=\alpha\cdot 0+\beta$, $0=\alpha\cdot 1+\beta$. δηλ. την $y=-2x+2$. Η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα σημεία $-2x+2 = 1\pm\sqrt{2-(x-1)^2}$



$$\Rightarrow \quad 2-(x-1)^2=(1-2x)^2 \iff 2-x^2+2x-1 = 1-4x+4x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(5x-6) = 0 \Leftrightarrow \quad x\left(x - \frac{6}{5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{6}{5}$$, δηλ. $(0,2)$ και $\left(\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

Αφού η διάμετρος που περνά από το σημείο $(x,y) = (0,2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1, y-1) = (-1, 1)$ περνά και από το σημείο
$(x-1, y-1) = (1,-1) \Leftrightarrow (x,y) = (2,0)$, το τμήμα με το μικρότερο εμβαδό βρίσκεται "αριστερά της ευθείας" (δηλ. για $x \leq \frac{6}{5}$).

Το ζητούμενο εμβαδό υπολογίζεται ως $E = E_1 + E_2$ με

$$E_1 = \int_0^{\frac{6}{5}} \left(-2x + 2 - \left(1 - \sqrt{2-(x-1)^2}\right)\right) dx = \int_0^{\frac{6}{5}} \left(\sqrt{2-(x-1)^2} - 2x + 1\right) dx$$

$$E_2 = \int_{1-\sqrt{2}}^{0} \left(1 + \sqrt{2-(x-1)^2} - \left(1 - \sqrt{2-(x-1)^2}\right)\right) dx = 2 \int_{1-\sqrt{2}}^{0} \sqrt{2-(x-1)^2}\, dx$$

όπου $E_2 = 2 \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \sqrt{2-y^2}\, dy \underset{y=x-1}{} \underset{z=-y}{=} 2 \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-z^2}\, dz = 2\sqrt{2} \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{1-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dz$

$\underset{u=\frac{z}{\sqrt{2}}}{=} 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \sqrt{1-u^2}\, du \underset{u=\sin\vartheta}{=} 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta\, d\vartheta = 4 \left(\cos\vartheta \sin\vartheta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \right.$

$\left. + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \right) = 4 \left(-\cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta\, d\vartheta \right) =$

$= 2 \left(-\cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - 1$

4. α) i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x}}$ $\lfloor$ E-2/23

Λύση: $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+3x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4})+\frac{9}{4}}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}} = \int \frac{dx}{\frac{3}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x+1\right)^2}} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x+1\right)^2}}$

$\underset{y=\frac{2}{3}x+1}{=} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{Arcsin} y + c = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{3}x+1\right) + c$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{2} (|x|+|1-x^2|)\,dx$

Λύση: $\int_{-2}^{2} (|x|+|1-x^2|)\,dx = 2\int_0^2 (x+|1-x^2|)\,dx =$

$= 2\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx\right) = 2\left(2+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 +\right.$

$\left. + \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2\right) = 2\left(\cancel{2}+1-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-\cancel{2}-\frac{1}{3}+1\right) = 2(2+2) = 8$

4.β) Αν $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις με $f(\alpha)<g(\alpha)$ και $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$: $f(\xi)=g(\xi)$

Απόδειξη:

Θεωρούμε την $h(x) := f(x)-g(x)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$ και θέλουμε να δείξουμε:

$h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $\int_\alpha^\beta h(x)\,dx>0$, $h(\alpha)<0$ $\Rightarrow$ $\exists\ \xi\in[\alpha,\beta]: h(\xi)=0$:

Αφού $\int_\alpha^\beta h(x)\,dx>0$ και η ολοκληρώσιμη, θα υπάρχει $\eta\in(\alpha,\beta]$ με $h(\eta)>0$

$\left[h(x)\le 0\ \forall x\in[\alpha,\beta] \Rightarrow \int_\alpha^\beta h(x)\,dx\le 0\right]$. Αφού $h(\alpha)<0$ και h συνεχής, από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών προκύπτει ότι $\exists\ \xi\in(\alpha,\eta)$ με $h(\xi)=0$.

4. γ) Να βρείτε την καμπύλη η οποία διέρχεται από το σημείο $(1,1)$ και της οποίας το μήκος (τόξου) μπορεί να υπολογισθεί από το ολοκλήρωμα $\int_1^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$. Να υπολογίσετε αυτό το μήκος.

Λύση: Αν η καμπύλη δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $(x,y)=(g(t),f(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$, όπου $g,f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμες, το μήκος της καμπύλης δίνεται ως

$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{(g'(t))^2+(f'(t))^2}\,dt$, και αν $g(t)=t=x$ από την

$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. Εδώ, θέτοντας $x=g(x)$, $x\in[1,4]$

είναι $(f'(x))^2=\frac{1}{4x} \iff f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \iff f(x)=\sqrt{x}+c$, και αφού $f(1)=1+c=1$, είναι $c=0$. Συνεπώς, η καμπύλη είναι το γράφημα της $y=\sqrt{x}$, $x\in[1,4]$. Το μήκος της είναι

$$L = \int_1^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\, dx$$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $1+\frac{1}{4x} = t^2 \iff t = \sqrt{1+\frac{1}{4x}} \ (>1)$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}\left(-\frac{1}{4x^2}\right) = \frac{1}{2t}\left(-\frac{1}{4x^2}\right) = -\frac{1}{2t}\,4(t^2-1)^2 = -\frac{2(t^2-1)^2}{t},$$

αφού $\frac{1}{2x} = \left(\left(1+\frac{1}{4x}\right)-1\right)2 = (t^2-1)2 \Rightarrow \frac{1}{4x^2} = 4(t^2-1)^2$

$$\Rightarrow dx = -\frac{t}{2(t^2-1)^2}\, dt \quad \Rightarrow \int\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\, dx = -\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{(t^2-1)^2}\, dt$$

$$\left[\Rightarrow L = -\frac{1}{2}\int_{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}^{\sqrt{1+\frac{1}{16}}}\frac{t^2}{(t^2-1)^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{1+\frac{1}{16}}}^{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}\frac{t^2}{(t^2-1)^2}\, dt\right]$$

$$\int\frac{2t}{(t^2-1)^2}\, dt \underset{y=t^2-1}{=} \int\frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}+C = -\frac{1}{t^2-1}+c = \frac{1}{1-t^2}+c$$

$$\Rightarrow \int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int t\,\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\,t\,\frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{t}{1-t^2} - \frac{1}{2}\,\underbrace{\operatorname{Arctgh} t}_{=\frac{1}{2}\log\frac{t+1}{t-1} \quad \text{für } t>1} + c$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,dt = \frac{1}{4}\,\frac{t}{t^2-1} + \frac{1}{8}\log\frac{t+1}{t-1} + c$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}{\frac{1}{4x}} + \frac{1}{8}\log\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1} + c = x\sqrt{1+\frac{1}{4x}} + \frac{1}{8}\log\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1} + c$$

$$\Rightarrow L = \int_1^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = 4\sqrt{1+\frac{1}{16}} - \sqrt{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{8}\log\frac{\sqrt{1+\frac{1}{16}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{16}}-1}\,\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}+1}$$

$$= \sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{8}\log\left(\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}\,\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right)$$

[Επαλήθευση: $\frac{d}{dx}(\cdots) = \sqrt{1+\frac{1}{4x}} + x\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}\left(-\frac{1}{4x^2}\right)$

$$+\frac{1}{8}\,\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}+1}\;\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\right)'\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1\right)-\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\right)'}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-\frac{1}{8}\,\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}+\underbrace{\frac{x}{2}(-2)\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}\left(-\frac{1}{4x^2}\right)}_{=\frac{1}{8}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}}=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\;\Big]$$