Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Επίκ. Καθ. Γ. Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
1 Φεβρουαρίου 2013

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όποιο γνωστό θεώρημα θέλετε, αρκεί να το αναφέρετε και να δικαιολογήσετε την εφαρμογή του. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θ 1. (α΄) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$\mathbb{R}^n \ni \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

είναι συνεχείς.

(β΄) Δείξτε ότι η $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\bar{f}(\bar{x}) = A\bar{x}$, $A = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $n, m \in \mathbb{N}$, είναι συνεχώς διαφορίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της.

(γ΄) Έστω $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ δυό φορές συνεχώς διαφορίσιμη. Εκφράστε την ισότητα

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \bar{f} = 0$$

με την βοήθεια του τελεστή ανάδελτα και αποδείξτε την. ($\operatorname{curl} \bar{f} := \operatorname{rot} \bar{f}$)

Θ 2. Έστω $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 0 < y < x^2\}$ και

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in U, \\ 0 & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus U. \end{cases}$$

Σχεδιάστε το U και εξετάστε την f στο σημείο $(0, 0)$ ως προς την συνέχεια, την μερική διαφορισιμότητα, την διαφορισιμότητα κατά κάθε κατεύθυνση, και την διαφορισιμότητά της.

Θ 3. Δίνεται η $f(x, y) = e^x \sin y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(α΄) Δείξτε ότι η f είναι k φορές συνεχώς μερικώς διαφορίσιμη για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(β΄) Βρείτε την παράγωγο, το εφαπτόμενο επίπεδο και την κατεύθυνση της μεγαλύτερης κλίσης της f στο σημείο $(0, 0)$, καθώς και τα τοπικά ακρότατά της.

(γ΄) Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού της f στο $(0, 0)$, $T_{2,f,(0,0)}$, και δείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^x \sin y - y - xy - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{για } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{για } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι συνεχής.

Θ 4. Δίνεται η $f(x,y) = 4x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(α′) Δώστε την καμπύλη στάθμης $c = 4$ της f, $L_f(4)$, ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και σχεδιάστε την.

(β′) Δώστε μια παραμετρικοποίηση $\bar{\gamma} : [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ της $L_f(4)$, έτσι ώστε η $\bar{\gamma}$ να είναι απλή, βρείτε το εφαπτόμενο διάνυσμα της $\bar{\gamma}$ για κάθε $t \in [\alpha, \beta)$ και υπολογίστε το μήκος $L(\bar{\gamma})$ της $\bar{\gamma}$ *(δεν απαιτείται συγκεκριμένος αριθμός)*.

(γ′) Δείξτε ότι στα σημεία της $L_f(4)$ η κλίση της f είναι κάθετη στην καμπύλη αυτή.

Θ 5. (α′) Δείξτε ότι το $U = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ είναι συμπαγές και βρείτε το $\mathring{U}$ και το ∂U.

(β′) Να δείξετε ότι η $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - x - y + 1$, $(x,y) \in U$, έχει στο U σημεία ολικού μεγίστου και ελαχίστου τα οποία και να βρείτε.

Θ 6. Δείξτε ότι υπάρχουν $\delta, \varepsilon > 0$ και συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις

$$y, z : (-1-\delta, -1+\delta) \to (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

που να ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$xe^{y(x)} + y(x)e^{z(x)} = 0 = xe^{z(x)} + z(x)e^{y(x)} \quad \forall\, x \in (-1-\delta, -1+\delta)$$

και υπολογίστε τις παραγώγους $y'(-1)$, $z'(-1)$.

Θ 7. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^n$ μια συνεχώς διαφορίσιμη $1-1$ συνάρτηση με

$$\det D\bar{f}(\bar{x}) \neq 0 \quad \forall\, \bar{x} \in U.$$

Δείξτε ότι το $f(U)$ είναι ανοικτό, η $\bar{f}^{-1} : \bar{f}(U) \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη με

$$\det D(\bar{f}^{-1})(\bar{y}) \neq 0 \quad \forall\, \bar{y} \in \bar{f}(U),$$

και ότι $\bar{f}(W)$ ανοικτό για κάθε ανοικτό $W \subset U$.

Θ 8. Δείξτε ότι το $U = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{a}\| = r\}$, $\|\bar{a}\| > r > 0$, είναι συμπαγές και βρείτε τα σημεία τοπικών και ολικών ακροτάτων της $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|^2$, $\bar{x} \in U$.

Θ 9. Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη με $f(\bar{0}) = 0$, δείξτε ότι

$$\exists\ \bar{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \ f(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{g}(\bar{x}).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε για κάθε $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ την $h_{\bar{x}}(t) := f(t\bar{x})$, $t \in \mathbb{R}$, και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.