Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Επίκ. Καθ. Γ. Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

19 Ιανουαρίου 2015

Θέμα 1. Δίνεται η ακολουθία των διανυσμάτων

$$(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = \left(1 - \frac{1}{\nu^2},\ \cos(\pi\nu),\ \frac{1}{\nu}\right), \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται (ως προς την Ευκλείδεια νόρμα) στην κλειστή μπάλα κέντρου $\bar{0} \in \mathbb{R}^3$ και ακτίνας $\sqrt{3}$ και ότι η ακολουθία δεν συγκλίνει για $\nu \to \infty$. Ποιά είναι τα σημεία συσσώρευσης (του συνόλου των όρων) της ακολουθίας;

Θέμα 2. Έστω $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \log(1+xy)$, όπου D ο μοναδιαίος κλειστός κυκλικός δίσκος κέντρου $(0,0)$. Δείξτε ότι το γράφημα της f είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

Θέμα 3. Δείξτε ότι η $\bar{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\bar{f}(x,y,z) = (t^3, (1+t^2)^{-1}, e^t)$, όπου $t = \sin(\|(x,y,z)\|^2)$, είναι συνεχής, διαφορίσιμη και συνεχώς διαφορίσιμη, και υπολογίστε την παράγωγό της.

Θέμα 4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x,y) = \begin{cases} x & \text{για } y = -x, \\ 0 & \text{για } y \neq -x. \end{cases}$$

Βρείτε για τη συνάρτηση f,

(α΄) σε κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ στο οποίο υπάρχουν, την κλίση και την παράγωγο,

(β΄) σε όποια σημεία και για όποιες κατευθύνσεις υπάρχει, την παράγωγο κατά κατεύθυνση.

Θέμα 5. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ για $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $x^2 + y^2 < 1$. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο $(x_0, 0, f(x_0, 0))$ του γραφήματος της f. Προς ποιά σημεία του $\mathbb{R}^3$ συγκλίνουν τα σημεία του επιπέδου αυτού όταν $x_0 \to 1$;

Θέμα 6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{2} - 1\right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Βρείτε και χαρακτηρίστε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της f.

Θέμα 7. Για τη συνάρτηση f στο (1) βρείτε τις καμπύλες στάθμης $c > 0$ της f και δείξτε ότι σε κάθε σημείο τους το εφαπτόμενο διάνυσμα και η κλίση της f στο σημείο αυτό είναι κάθετα.

Θέμα 8. (α΄) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\bar{f}(x,y) = (e^{x+y}, x+2y)^T$ αντιστρέφεται σε μια ανοικτή περιοχή που περιέχει το $(0,0)$ και υπολογίστε την παράγωγο $D(\bar{f}^{-1})(1,0)$.

(β΄) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3z^2 + z^3yx = 2$ έχει μοναδική λύση $z(x,y)$ κοντά στο $(x,y,z) = (1,1,1)$ και υπολογίστε την κλίση της z στο σημείο $(1,1)$.

Θέμα 9. Έστω ο συμμετρικός και αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = \frac{1}{2}(A\bar{x}) \cdot \bar{x}$. Δείξτε με χρήση του Θεωρήματος πολλαπλασιαστών Lagrange ότι ο πίνακας A έχει τουλάχιστον μία μη μηδενική ιδιοτιμή λ και ένα ιδιοδιάνυσμα $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar{x}\| = 1$.

Θέμα 10. Έστω $U,\ V \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά και $S, T : U \to V$ ένα προς ένα και επί με $S,\ S^{-1},\ T,\ T^{-1}$ διαφορίσιμες. Δείξτε ότι

$$DS(x) = DT\left((T^{-1} \circ S)(x)\right)\, D(T^{-1} \circ S)(x) \qquad \forall\, x \in U.$$

Κάθε θέμα αντιστοιχεί σε μία μονάδα. Μπορείτε να τα λύσετε με όποιο τρόπο θέλετε, αρκεί να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!