Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

1 Φεβρουαρίου 2016

Θέμα 1. [2] Εξετάστε σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & x \geq 0 \text{ και } y \geq 0, \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

ως προς τη συνέχεια, τη μερική διαφορισιμότητα, τη διαφορισιμότητα και τη συνεχή διαφορισιμότητά της, και δώστε, όπου υπάρχουν, τις μερικές παραγώγους, την παράγωγο, και την παράγωγο προς κάθε κατεύθυνση.

Θέμα 2. [2] Δίνεται το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

$$C = \{e^{-t}(\cos t, \sin t) : \; t \geq 0\}$$

και η συνάρτηση

$$f : \bar{C} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} -(x^2 + y^2)^{-1}, & (x, y) \in C, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α′) Βρείτε την κλειστή θήκη $\bar{C} \subset \mathbb{R}^2$ του C και δείξτε ότι είναι συμπαγής.

(β′) Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της f και χαρακτηρίστε τα.

Θέμα 3. [1.5] Αν L είναι το σύνολο στάθμης $c = 4$ της συνάρτησης $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, δείξτε ότι η κλίση της g στο σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in L$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\bar{f}'(0)$, όπου $\bar{f} : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη με $f([-1, 1]) \subset L$ και $\bar{f}(0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Θέμα 4. [1] Δίνονται $k \in \mathbb{N}$ τυχαία αλλά σταθερά σημεία $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k \in \mathbb{R}^n$, διαφορετικά μεταξύ τους. Βρείτε σε ποιό σημείο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ελαχιστοποιείται η συνάρτηση

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{k} \|\bar{x} - \bar{x}_j\|^2, \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Θέμα 5. [1] Η επίδραση $E(x, t)$ που έχουν x μονάδες ενός φαρμάκου t ώρες μετά τη λήψη του δίνεται προσεγγιστικά από τον τύπο

$$E(x, t) = x^2(a - x)t^2 e^{-t}, \qquad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq t.$$

Βρείτε τη δόση x και το χρόνο t, για τα οποία το φάρμακο έχει τη μέγιστη επίδραση.

Θέμα 6. [1] Δίνεται η συνάρτηση

$$f : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Βρείτε τα τοπικά και όλικα ακρότατα και χαρακτηρίστε τα.

Θέμα 7. [1.5] Έστω $W \subset U \subset \mathbb{R}^n$ και $V \subset \mathbb{R}^m$ όλα ανοικτά, και $\bar{f} : U \times V \to \mathbb{R}^m$, $\bar{g} : W \to V$ διαφορίσιμες. Δείξτε ότι η $\bar{f}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x}))$, $\bar{x} \in W$, είναι διαφορίσιμη και βρείτε την παράγωγό της..

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!