Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

29 Ιανουαρίου 2018

Θέμα 1. [1+2] Έστω $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq \alpha x\}$ με $\alpha > 0$, και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} c + x + y, & (x,y) \in A, \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A, \end{cases} \qquad c > 0.$$

(α΄) Δείξτε ότι το $A \subset \mathbb{R}^2$ είναι κλειστό και βρείτε το σύνορο, ∂A, και το εσωτερικό του, $\mathring{A}$.

(β΄) Εξετάστε σε κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ την f ως προς τη συνέχεια, μερική διαφορισιμότητα, διαφορισιμότητα και συνεχή διαφορισιμότητά της, και βρείτε, όπου υπάρχουν, τις μερικές παραγώγους, την κλίση, την παράγωγο και τις παραγώγους κατά κάθε κατεύθυνση.

Θέμα 2. [1] Έστω $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη. Δείξτε ότι η $\bar{f}$ είναι συνεχής.

Θέμα 3. [1+0.5] Έστω $U = [-1, 1] \times [-1, 1]$ και $f : U \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$.

(α΄) Βρείτε τα ακρότατα της f.

(β΄) Αποδείξτε ότι στα σημεία $(-1, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, -1)$, $(0, 1)$ η f δεν έχει ακρότατα.

Θέμα 4. [1.5] Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια, αν υπάρχουν:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x) - 2x + y}{x^3 + y}, \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x^2 y \cos z}{x^2 + y^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\|(x,y)\|} \begin{pmatrix} e^{x(y+1)} - x - 1 \\ \sin(x - y) \end{pmatrix}.$$

Θέμα 5. [1] Έστω $\nu, r > 0$ και έστω ένα σωματίδιο, το οποίο διατρέχει την καμπύλη

$$\bar{\gamma}(t) = \big(\nu t - r\sin(\nu t/r), r - r\cos(\nu t/r)\big) \in \mathbb{R}^2, \qquad t \in [0, 2\pi r/\nu].$$

(α΄) Σε ποια σημεία $(x_0, y_0) \in C = \bar{\gamma}([0, 2\pi r/\nu])$ το διάνυσμα ταχύτητας του σωματιδίου είναι παράλληλο στον άξονα των x και ποια είναι η ταχύτητα του σωματιδίου στα σημεία αυτά;

(β΄) Ποιο είναι το μήκος της καμπύλης που διέτρεξε το σωματίδιο;

Θέμα 6. [1] Έστω $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη και $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $g(\bar{x}) = \sin(\|\bar{f}(\bar{x})\|^2)$. Επιχειρηματολογήστε γιατί η g είναι διαφορίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της.

Θέμα 7. [1] Έστω $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = xy$ και έστω L το σύνολο στάθμης $c > 0$ της f. Βρείτε το L, παραμετροποιήστε το μέσω μιας καμπύλης $\bar{\gamma} : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ και δείξτε ότι η κλίση της f είναι κάθετη στο εφαπτόμενο διάνυσμα της $\bar{\gamma}$ σε κάθε σημείο της εικόνας της.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!