**Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης**

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ**

**13 Φεβρουαρίου 2019**

**Θέμα 1. [0.3 + 0.3 + 0.4]** Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα όρια

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2\ln x + 2(x-1)^2 + 2y^2}{x^2+y^2-2x+1},$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1+\sqrt{|x+y+z|}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

**Θέμα 2. [0.4 + 0.6]**

(α΄) Έστω $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $\bar{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ συνεχείς. Δείξτε ότι η $\bar{g} \circ \bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ είναι συνεχής.

(β΄) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ σταθερός πίνακας και $f(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor βαθμού τρία της $f$ στο $\bar{0}$.

**Θέμα 3. [0.5 + 2]** Έστω $M = \{x(1,1) : x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} e^x - 1, & (x,y) \in M, \\ 0, & (x,y) \notin M. \end{cases}$$

(α΄) Βρείτε την κλειστή θήκη $\overline{M}$ του $M$ στο $\mathbb{R}^2$.

(β΄) Εξετάστε σε κάθε σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ την $f$ ως προς τη συνέχεια, μερική διαφορισιμότητα και διαφορισιμότητά της, και βρείτε, όπου και όποιες υπάρχουν, τις μερικές παραγώγους, την κλίση, την παράγωγο και τις παραγώγους κατά όλες τις κατευθύνσεις $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\bar{v}\| = 1$.

**Θέμα 4. [4 × 0.5]** Έστω $a, b, c > 0$ και $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2$.

(α΄) Βρείτε το σύνολο $L_f(1)$ στάθμης 1 της $f$ και χαρακτηρίστε το γεωμετρικά.

(β΄) Δείξτε ότι το $L_f(1)$ είναι συμπαγές.

(γ΄) Δείξτε ότι σε κάθε σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in L_f(1)$ η κλίση της $f$ στο σημείο αυτό είναι κάθετη στο $L_f(1)$.

(δ΄) Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στο $L_f(1)$ στο σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in L_f(1)$.

**Θέμα 5. [1.5]** Βρείτε και χαρακτηρίστε τα σημεία ακροτάτων και τα ακρότατα της $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} yx^2, & x^2+y^2 \le 1, \\ \frac{1}{\sqrt{3}}, & x^2+y^2 > 1 \text{ και } y \ge 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}, & x^2+y^2 > 1 \text{ και } y < 0. \end{cases}$$

**Θέμα 6. [1]** Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\exists\, \delta, C > 0 \quad \forall\, \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta) : \quad |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| \le C\|\bar{x} - \bar{x}_0\|.$$

**Θέμα 7. [1]** Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $y : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ με $0 < \varepsilon \ll 1$ και $y(0) = 1$, που δίνεται πεπλεγμένα μέσω της εξίσωσης

$$(x^2+y^2)^2 - 2x(x + \cosh y) - e^{y-1} = 0.$$

**Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**