Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Επίκ. Καθ. Γ. Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

19 Ιουνίου 2014

Θέμα 1. (α΄) Δείξτε ότι το σύνολο $B = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}\| \le 1\}$ είναι φραγμένο, κλειστό, συμμετρικό (δηλ. $\forall\, \bar{x} \in B : -\bar{x} \in B$) και κυρτό (δηλ. $\forall\, \bar{x}, \bar{y} \in B,\ \forall\, t \in [0,1] :\ t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in B$).

(β΄) Έστω $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Βρείτε στο σημείο $(1,1)$ το εφαπτόμενο επίπεδο της f και την παράγωγο σε κάθε κατεύθυνση $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\bar{v}\| = 1$. Ποιά η σχέση των δύο;

Θέμα 2. (α΄) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\mathbb{R}^n \ni \bar{x} \mapsto e^{\|\bar{x}\|}$ είναι συνεχής.

(β΄) Έστω

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(u,v,w) = (e^{u-w}, \cos(v+u) + \sin(u+v+w)),\\ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x,y) = (e^x, \cos(y-x), e^{-y}). \end{aligned}$$

Εξετάστε πόσες φορές είναι διαφορίσιμη η $f \circ g$ και υπολογίστε την παράγωγό της στο σημείο $(0,0)$.

Θέμα 3. Εξετάστε σε ποιά σημεία $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0$$

είναι συνεχής, μερικώς διαφορίσιμη, διαφορίσιμη, συνεχώς διαφορίσιμη.

Θέμα 4. Βρείτε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ το μέγιστο πεδίο ορισμού $D_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ της συνάρτησης $\bar{x} \mapsto \|\bar{x}\|^\alpha$ και υπολογίστε, όπου υπάρχει, την κλίση της. Όπου υπάρχει η κλίση, είναι πάντα παράγωγος;

Θέμα 5. Έστω $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $Df(\bar{x}) = g(\bar{x})\bar{x}$ για κάθε $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι κάθε σφαίρα κέντρου $\bar{0}$ και ακτίνας $r > 0$ περιέχεται σε ένα σύνολο στάθμης $c \in \mathbb{R}$ της f.

Θέμα 6. Έστω $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $\|(x,y)\| < 1$. Βρείτε σε κάθε σημείο (x,y,z) του γραφήματος της f το εφαπτόμενο επίπεδο και ένα διάνυσμα $\bar{n} \in \mathbb{R}^3$, $\|\bar{n}\| = 1$, κάθετο στο επίπεδο. Ποιά η σχέση του $\bar{n}$ με το (x,y,z);

Θέμα 7. Έστω $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $\|(x,y)\| < 1$. Βρείτε ένα πολυώνυμο δεύτερου βαθμού $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ 0 < \delta < 1 : \quad \|(x,y)\| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x,y) - p(x,y)| < \varepsilon(x^2+y^2).$$

Θέμα 8. (α΄) Βρείτε τα μήκη των ακμών $a, b, c > 0$ ενός ορθογώνιου κουτιού όγκου $v > 0$, έτσι ώστε η επιφάνειά του να έχει το μικρότερο δυνατό εμβαδό.

(β΄) Βρείτε και χαρακτηρίστε τα τοπικά ακρότατα της $f(x,y) = x^2y - 2xy + y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Θέμα 9. (α΄) Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $f(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ υπό τη συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$.

(β΄) Έστω $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες με

$$f(x, y(x)) = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \neq 0 \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Δείξτε ότι

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y(x))}{\frac{\partial}{\partial y} f(x, y(x))}.$$

Θέμα 10. (α΄) Δείξτε ότι μια συνάρτηση $\bar{f} = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη αν και μόνο αν οι $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, είναι διαφορίσιμες και εκφράστε την παράγωγο της $\bar{f}$ μέσω των παραγώγων των f_i.

(β΄) Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες. Δείξτε ότι $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

Κάθε θέμα αντιστοιχεί σε μία μονάδα. Μπορείτε να τα λύσετε με όποιο τρόπο θέλετε, αρκεί να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!