Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Γιάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

15 Ιουνίου 2015

Θέμα 1. [1] Έστω $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και

$$A = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r\}, \qquad K = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq r\}.$$

Δείξτε ότι το σύνολο A είναι ανοικτό και το σύνολο K είναι κλειστό.

Θέμα 2. [1] Έστω $\bar{f} := (f_1, \ldots, f_n)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ένα διανυσματικό πεδίο και $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Δώστε τον ορισμό της συνέχειας της $\bar{f}$ στο σημείο $\bar{x}_0$ και δείξτε ότι

$$\bar{f} \text{ συνεχής στο } \bar{x}_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n: \quad f_i \text{ συνεχείς στο } \bar{x}_0.$$

Θέμα 3. [1.5] Εξετάστε σε ποιά σημεία $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x, y) \in C, \\ 0, & (x, y) \notin C, \end{cases} \qquad C = \{e^{-t}(\cos t, \sin t) : t \geq 0\},$$

είναι (i) συνεχής, (ii) μερικώς διαφορίσιμη, (iii) διαφορίσιμη, και δώστε τις μερικές παραγώγους και την παράγωγό της, όπου υπάρχουν.

Θέμα 4. [2.5] Έστω η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{3}y^3, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ e^{-x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Βρείτε (i) τα σημεία ασυνέχειας της f, (ii) τα σημεία τοπικών και ολικών ακροτάτων της f, τα οποία και να χαρακτηρίσετε, (iii) το εφαπόμενο επίπεδο στα σημεία $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ όταν $x_0^2 + y_0^2 > 1$. (iv) Πώς συμπεριφέρεται το εφαπτόμενο επίπεδο όταν $x_0^2 + y_0^2 \to \infty$;

Θέμα 5. [2] Δίνονται το γράφημα $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, και η καμπύλη $\gamma(t) = t(\cos t, \sin t)$, $t > 0$. Δείξτε ότι σε κάθε σημείο της καμπύλης $\Phi \circ \gamma$ η εφαπτόμενη ευθεία περιέχεται στο εφαπτόμενο επίπεδο της Φ στο σημείο αυτό.

Θέμα 6. [1]

(α′) Υπολογίστε το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2 + y^2}$.

(β′) Επαληθεύστε τον Κανόνα της Αλυσίδας για την παράγωγο της $g \circ f$, όπου $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2), \qquad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Θέμα 7. [1] Επαληθεύστε το Θεώρημα της Αντίστροφης Απεικόνισης για ομοπαραλληλικές απεικονίσεις $\mathbb{R}^n \ni \bar{x} \mapsto A\bar{x} + \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ με $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας!
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!