Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

10 Ιουνίου 2016

Θέμα 1. [3] Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{αν } (x,y) \in E, \\ -x^2-y^2, & \text{αν } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E, \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \text{με} \quad E = \{(x,x) : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

(α΄) **[0.5]** Αποδείξτε ότι το σύνολο E είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^2$.

(β΄) **[1.5]** Εξετάστε σε κάθε σημείο $(x,x) \in E$ την f ως προς τη συνέχεια, μερική διαφορισιμότητα, διαφορισιμότητα κατά κατεύθυνση και διαφορισιμότητα και βρείτε, όποτε υπάρχουν, τις μερικές παραγώγους, τις παραγώγους κατά κατεύθυνση, την κλίση και την παράγωγο της f στα σημεία αυτά.

(γ΄) **[1]** Βρείτε τα σημεία τοπικών και ολικών ακροτάτων του περιορισμού της f στο

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}.$$

Θέμα 2. [1.5] Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση και $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

(α΄) **[0.5]** Δώστε τον ορισμό της παραγώγου κατά κατεύθυνση $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x})$, όπου $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{v}\| = 1$.

(β΄) **[0.5]** Αποδείξτε ότι $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{v}$.

(γ΄) **[0.5]** Βρείτε τις κατευθύνσεις κατά τις οποίες η $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x})$ λαμβάνει τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

Θέμα 3. [1.5] Δίνεται η συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad \Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}.$$

(α΄) **[0.5]** Δώστε τις καμπύλες στάθμης $c \in (0,1]$ της f.

(β΄) **[0.5]** Βρείτε το πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού της f στο σημείο $(0,0)$.

(γ΄) **[0.5]** Δώστε το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο σημείο $(0,0)$.

Θέμα 4. [1] Έστω η $f(x,y) = \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$, με $\alpha, \beta \ge 0$ σταθερά. Δείξτε ότι το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ισούται με το μηδέν, αν $\alpha+\beta > 2$, και δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, αν $\alpha+\beta \le 2$.

Θέμα 5. [1] Αποδείξτε μόνο με χρήση των ορισμών των μερικών παραγώγων, της κλίσης και της παραγώγου ότι η συνάρτηση $f(x,y,z) = x+y+z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, είναι διαφορίσιμη.

Θέμα 6. [1] Βρείτε, αν και όποια υπάρχουν, τα σημεία τοπικών και ολικών ακροτάτων της

$$f(x,y) = \begin{cases} xy, & \text{αν } x^2+y^2 < 1, \\ e^{1-x^2-y^2}, & \text{αν } x^2+y^2 \ge 1, \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Θέμα 7. [1] Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\bar{f}(x,y) = e^x(\cos y, \sin y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

είναι συνεχώς διαφορίσιμη και αντιστρέψιμη σε κάποιο ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^2$ με $(1,0) \in U$ και βρείτε την παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης $\bar{g} : \bar{f}(U) \to \mathbb{R}^2$ στο σημείο $\bar{f}(1,0)$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!