

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

20 Ιουνίου 2017

**Θέμα 1. [1]** Έστω  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  διαφορίσιμες στο  $\bar{x}$ . Δείξτε ότι η  $f + g$  είναι διαφορίσιμη στο  $\bar{x}$  και δώστε την παράγωγό της.

**Θέμα 2. [0.3 + 0.3 + 0.2]** Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα ακόλουθα όρια και, αν υπάρχουν, να τα υπολογίσετε:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|}{|x| + |y|}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y + 2)e^{-1/(x^2+y^2)}.$$

**Θέμα 3. [0.5 + 0.5]**

(α') Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$ , είναι συνεχής.

(β') Έστω η  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  και ένα σημείο  $(x_0, y_0) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ .

Βρείτε τις κατευθύνσεις στις οποίες μηδενίζεται η παράγωγος κατά κατεύθυνση στο  $(x_0, y_0)$ .

**Θέμα 4. [1]** Έστω η  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$

Εξετάστε την  $f$  ως προς τη συνέχεια και διαφορισιμότητά της, και βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημά της, όπου υπάρχει.

**Θέμα 5. [0.4 + 0.8]** Έστω  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < y < \frac{1}{x}\}$  και  $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x + y$ .

(α') Είναι το  $\bar{U}$  συμπαγές;

(β') Βρείτε και χαρακτηρίστε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της  $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Θέμα 6. [0.2 + 0.4 + 0.4 + 1]**

(α') Βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό (δηλ. μέγιστο) υποσύνολο  $U \subset \mathbb{R}^2$  στο οποίο ορίζεται η  $f(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y$ .

(β') Είναι το  $U$  ανοικτό; Δικαιολογήστε!

(γ') Πόσες φορές διαφορίσιμη είναι η  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ; Γιατί;

(δ') Βρείτε και χαρακτηρίστε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Θέμα 7. [0.5 + 0.5 + 1.5 + 0.5]** Έστω  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z + 1 \neq 0\}$  και  $\bar{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  με

$$\bar{f}(x, y, z) = \frac{1}{x + y + z + 1}(x, y, z).$$

(α') Δείξτε ότι το  $U$  είναι ανοικτό.

(β') Δείξτε ότι η  $\bar{f}$  είναι διαφορίσιμη, και υπολογίστε την παράγωγό της.

(γ') Δείξτε ότι η  $\bar{f}$  είναι  $1 - 1$ , και βρείτε την εικόνα της και την αντίστροφή της.

(δ') Δείξτε ότι η αντίστροφή της  $\bar{f}$  είναι διαφορίσιμη, και υπολογίστε την παράγωγό της.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!