Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

30 Μαΐου 2022

Θέμα 1. [1.5]
Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και έστω η συνάρτηση $g(x,y) = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το σύνολο στάθμης $c > 0$ της g, $L_g(c) \subset \mathbb{R}^2$, είναι συμπαγές σύνολο και χαρακτηρίστε το γεωμετρικά.

Θέμα 2. [1]
Υπολογίστε, αν υπάρχει, το ακόλουθο όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} \begin{pmatrix} \dfrac{\ln|x-y+z|}{\cos(x^2-2x+y+z-4)} \\ \dfrac{x^2+xy-3x}{x+y-3} \end{pmatrix}.$$

Θέμα 3. [2]
Έστω $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ και έστω $f : K \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x$. Βρείτε τα σημεία τοπικών και ολικών ακροτάτων της f και χαρακτηρίστε τα.

Θέμα 4. [1.5]
Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-1)^2$. Βρείτε για κάθε σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ με $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \neq 1$ την κατεύθυνση προς την οποία η f παρουσιάζει τον μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης και περιγράψτε την κατεύθυνση αυτή γεωμετρικά.

Θέμα 5. [1.5]
Έστω η $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού της f γύρω από το $(0,0)$ και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x^2+y^2+1)+x^2+y^2}{x^2+y^2}.$$

Θέμα 6. [1+3×0.5=2.5]
Έστω η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(\bar{x}) = \begin{cases} \|\bar{x}\|, & \|\bar{x}\| \geq 1, \\ 1, & \|\bar{x}\| < 1. \end{cases}$

(α΄) Βρείτε σε ποια σημεία είναι συνεχής και σε ποια διαφορίσιμη η f.

(β΄) Δώστε τα σημεία τοπικών και ολικών ακροτάτων της f, τα οποία και να χαρακτηρίσετε.

(γ΄) Για την περίπτωση $n = 2$ δώστε το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο σημείο του $(0,0,1)$.

(δ΄) Για την περίπτωση $n = 2$ περιγράψτε το γράφημα της f γεωμετρικά.

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!