Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Επίκ. Καθ. Γ. Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

1 Σεπτεμβρίου 2014

Θέμα 1. Έστω μια ακολουθία διανυσμάτων $\bar{x}_\nu = \left(x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{N}$, και ένα διάνυσμα $\bar{x}_0 = \left(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n$. Δώστε τον ορισμό της σύγκλισης της ακολουθίας $(\bar{x}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ προς το σημείο $\bar{x}_0$ όταν $\nu \to \infty$ και αποδείξτε τις ισοδυναμίες

$$\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \iff \bar{x}_\nu - \bar{x}_0 \to 0 \iff \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0 \iff \forall\, i = 1, \ldots, n:\ x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)},$$

όπου $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

Θέμα 2. Δώστε τα εσωτερικά, εξωτερικά και συνοριακά σημεία του συνόλου $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.

Θέμα 3. (α΄) Έστω η $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$, $x \neq y$. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,x_0)} f(x, y)$ για κάποια $x_0 \in \mathbb{R}$.

(β΄) Έστω η $g(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Μπορείτε να ορίσετε μια πραγματική τιμή $\tilde{g}(0, 0)$, έτσι ώστε η επέκταση $\tilde{g}$ της g στο $\mathbb{R}^2$ να είναι συνεχής στο $(0, 0)$;

Θέμα 4. Εξετάστε τη συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ως προς τη συνέχεια, μερική διαφορισιμότητα, διαφορισιμότητα και συνεχή διαφορισιμότητά της σε κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και δώστε τις μερικές παραγώγους και την παράγωγό της, όπου αυτές υπάρχουν.

Θέμα 5. Έστω η απεικόνιση

$$(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \ni (r, \vartheta, \varphi) \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (r, \vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Δείξτε ότι για κάθε (r, ϑ, φ) και το αντίστοιχό του (x, y, z) ισχύει

$$\frac{\partial x}{\partial r}(r, \vartheta, \varphi)\frac{\partial r}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial x}{\partial \vartheta}(r, \vartheta, \varphi)\frac{\partial \vartheta}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r, \vartheta, \varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) = 1.$$

Θέμα 6. Βρείτε και χαρακτηρίστε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 3y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

και δώστε το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(3, 1, -8)$ του γραφήματος της f, καθώς και την παράγωγο της f κατά κατεύθυνση $(1, 0)$ στο σημείο $(3, 1)$.

Θέμα 7. Έστω $\alpha, \beta, \gamma, k > 0$. Ποιές τιμές των $x, y, z > 0$ με $x + y + z = k$ δίνουν στην $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ τη μεγαλύτερή της τιμή;

Θέμα 8. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού της $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, στο σημείο $(0, 0)$, καθώς και το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$.

Θέμα 9. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 - \sin y + y^4 = 1$ έχει κοντά στο $x = 1$ μια μοναδική διαφορίσιμη λύση $y(x)$ με $y(1) = 0$ και υπολογίστε την παράγωγο $y'(1)$.

Θέμα 10. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και $g(x, y, z) := f(x - y, y - z, z - x)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 0 \quad \forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Κάθε θέμα αντιστοιχεί σε μία μονάδα. Μπορείτε να τα λύσετε με όποιο τρόπο θέλετε, αρκεί να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!