Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Γιάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

1 Σεπτεμβρίου 2015

Θέμα 1. [1] Εξετάστε σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 + \sin(xy), & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases}$$

ως προς τη συνέχεια, τη μερική διαφορισιμότητα και τη διαφορισιμότητά της, και δώστε, όπου υπάρχουν, τις μερικές παραγώγους, την παράγωγο, και το εφαπτόμενο επίπεδό της.

Θέμα 2. [1] Εξετάστε αν υπάρχουν τα ακόλουθα όρια, και, αν υπάρχουν, υπολογίστε τα:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 + y^2 - 2}{|x-1| + |y-1|}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Θέμα 3. [2] Έστω $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1],\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$, όπου

$$\phi_1(x) = \begin{cases} -(x+1)^2, & x \in [-1, 0], \\ -(x-1)^2, & x \in [0, 1], \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \phi_2(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \in [-1, 0], \\ (x-1)^2, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

(α΄) Σχεδιάστε το U.

(β΄) Δείξτε ότι το U είναι κλειστό και φραγμένο.

(γ΄) Βρείτε και χαρακτηρίστε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $f : U \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y^3$.

(δ΄) Γιατί είμαστε σίγουροι ότι η f έχει ολικό μέγιστο και ελάχιστο;

Θέμα 4. [1.5] Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{x}) \cdot \bar{x}$, όπου

$$\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad g_i(\bar{x}) = \|\bar{x}\|^{2i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(α΄) Δείξτε ότι η παράγωγος της f υπάρχει σε κάθε $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ και υπολογίστε την.

(β΄) Σε ποιά σημεία $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη η $\bar{g}$;

Θέμα 5. [1.5] Σε κάθε σημείο (x, y) του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ επικρατεί η θερμοκρασία $T(x, y)=x^2+2y^2$. Βρίσκεστε στο σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Προς ποιά κατεύθυνση $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\bar{v}\| = 1$, πρέπει να κινηθείτε για να αισθανθείτε την πιο γρήγορη μείωση θερμοκρασίας; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

Θέμα 6. [1] Για ποιές τιμές του μήκους $\ell \geq 0$, του πλάτους $w \geq 0$ και του ύψους-του $h \geq 0$ έχει ένα ορθογώνιο κουτί τον μεγαλύτερο όγκο, αν πρέπει να ισχύει $\ell + 2w + 2h \leq 3$;

Θέμα 7. [2] Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : U \to \mathbb{R}$ συνεχής.

(α΄) Αν $U = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, δώστε ένα παράδειγμα μιας μη φραγμένης, αλλά συνεχούς συνάρτησης $f : U \to \mathbb{R}$.

(β΄) Έστω ότι για κάθε $\bar{x} \in \partial U$ υπάρχει το όριο $\lim_{\bar{y}\to\bar{x}} f(\bar{y}) \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $g : \overline{U} \to \mathbb{R}$ με

$$g(\bar{x}) := \begin{cases} f(\bar{x}), & \bar{x} \in U, \\ \lim_{\bar{y}\to\bar{x}} f(\bar{y}), & \bar{x} \in \partial U \end{cases}$$

είναι συνεχής συνάρτηση, δηλ. είναι συνεχής σε κάθε $\bar{x} \in \overline{U}$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας!
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!