**Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης**

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ**

**7 Σεπτεμβρίου 2018**

**Θέμα 1. [0.5+0.5]** Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα όρια

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \sqrt{\left|\frac{x+y}{x-y}\right|} \qquad \text{και} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x - 1 - (x^2/2)}{x^4+y^4}.$$

**Θέμα 2. [0.5+0.5+0.5]** Έστω $f(x,y,z) = 1 - z + x^2 + y^2$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(α΄) Δώστε το σύνολο στάθμης 1 της $f$, δηλ. το $S := L_f(1)$.

(β΄) Δώστε το εφαπτόμενο επίπεδο της $S$ στο σημείο $(1,1,2)$.

(γ΄) Έστω $\bar{\gamma} : (-1,1) \to S$ μια κανονική καμπύλη. Δείξτε ότι η κλίση της $f$ στο σημείο $\bar{\gamma}(0)$ είναι κάθετη στο εφαπτόμενο διάνυσμα της $\bar{\gamma}$ στο $\bar{\gamma}(0)$.

**Θέμα 3. [0.5+1+0.5]** Έστω $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > \sqrt{|x|}\right\}$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & (x,y) \in U, \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus U. \end{cases}$$

(α΄) Σχεδιάστε το $U$ και δώστε, χωρίς απόδειξη, το εσωτερικό, το εξωτερικό και το σύνορό του.

(β΄) Εξετάστε την $f$ σε κάθε σημείο $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ ως προς τη συνέχεια, μερική διαφορισιμότητα και διαφορισιμότητά της.

(γ΄) Εξετάστε σε ποιά σημεία $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ και για ποιές κατευθύνσεις $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\bar{v}\| = 1$, υπάρχει η παράγωγος κατά κατεύθυνση $\bar{v}$ της $f$ στο σημείο $(x_0,y_0)$.

**Θέμα 4. [1.5]** Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, και χαρακτηρίστε τα.

**Θέμα 5. [1]** Έστω $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\bar{\gamma} \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ και $g = f \circ \bar{\gamma}$. Εκφράστε την $g''$ χρησιμοποιώντας την κλίση και τον Εσσιανό πίνακα της $f$ και τις $\bar{\gamma}'$, $\bar{\gamma}''$.

**Θέμα 6. [1]** Έστω $f(x,y) = 1/(1+x^2+y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor βαθμού (ή τάξης) 2 της $f$ στο $(0,0)$, δηλ. το $T_{2,f,(0,0)}(x,y)$, και επαληθεύστε, χωρίς χρήση του Θεωρήματος Taylor, ότι

$$f(x,y) = T_{2,f,(0,0)}(x,y) + o(x^2+y^2) \quad \text{για} \quad (x,y) \to (0,0).$$

**Θέμα 7. [0.5+0.5]** Έστω η καμπύλη $\bar{\gamma}(t) = \left(\cos t, \sin t, \sin(t/2)\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

(α΄) Βρείτε τα σημεία της καμπύλης με τη μεγαλύτερη και αυτά με τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων και δώστε τις αποστάσεις αυτές.

(β΄) Εξετάστε αν το σύνολο $\{\bar{\gamma}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ είναι συμπαγές.

**Θέμα 8. [1]** Έστω $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά, $\bar{f} : U \to V$ $1-1$ και επί και $\bar{f}, \bar{f}^{-1}$ διαφορίσιμες. Αν $\bar{x}_0 \in U$ με $D\bar{f}(\bar{x}_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμο και $\bar{y}_0 = \bar{f}(\bar{x}_0)$, δείξτε, χωρίς χρήση του Θεωρήματος Αντίστροφης Συνάρτησης, ότι

$$D(\bar{f}^{-1})(\bar{y}_0) = D\bar{f}(\bar{x}_0)^{-1}.$$

**Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**