Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ III**

**10 Σεπτεμβρίου 2019**

**Θέμα 1. [0.5+1.5+1]**
Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=|y-x^2|$.

(α΄) Δείξτε ότι τα σύνολα $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>x^2\}$ και $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<x^2\}$ είναι ανοικτά στον $\mathbb{R}^2$.

(β΄) Για κάθε σημείο $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ προσδιορίστε ακριβώς όλες τις κατευθύνσεις $(\nu_1,\nu_2)\in\mathbb{R}^2$ με $\nu_1^2+\nu_2^2=1$ για τις οποίες υπάρχει η παράγωγος κατά κατεύθυνση της $f$ και δώστε την τιμή της.

(γ΄) Μελετήστε την $f$ σε κάθε σημείο $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ως προς τη συνέχεια, μερική διαφορισιμότητα, διαφορισιμότητα και συνεχή διαφορισιμότητα και προσδιορίστε (όπου και όποιες υπάρχουν) τις μερικές παραγώγους, την κλίση και την παράγωγο της $f$.

**Θέμα 2. [0.5+0.5]**

(α΄) Υπολογίστε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{(x,y,z)\to\bar{0}}\bar{f}(x,y,z)$ της $\bar{f}:\mathbb{R}^3\setminus\{\bar{0}\}\to\mathbb{R}^2$ με

$$\bar{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix}(z+1)\sin\dfrac{y^2}{|x|+|y|+|z|}\\[2ex] \dfrac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2+(|x|+|y|+|z|)^2}\end{pmatrix}.$$

(β΄) Έστω $U\subset\mathbb{R}^2$ ανοικτό και $u,\nu:U\to\mathbb{R}$ δυο φορές συνεχώς διαφορίσιμες με

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \nu}{\partial y}\quad\text{και}\quad\frac{\partial \nu}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Δείξτε ότι $\Delta u=\Delta\nu=0$, όπου $\Delta:=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

**Θέμα 3. [0.5+0.5+1+1+0.5]**
Δίνεται η συνάρτηση $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με $V(\bar{x})=\left(\|\bar{x}\|^2-1\right)^2$.

(α΄) Δώστε τα σύνολα στάθμης $0$ και $1$ της $V$ και περιγράψτε τα γεωμετρικά.

(β΄) Δώστε την κλίση της $V$ σε κάθε σημείο $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$.

(γ΄) Δείξτε ότι ο Εσσιανός της $V$ στο σημείο $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ έχει τη μορφή $H_V(\bar{x})=4(\|\bar{x}\|^2-1)I+8\,\bar{x}\,\bar{x}^T$, όπου $I\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ο μοναδιαίος πίνακας και $\bar{x}^T=(x_1,\dots,x_n)$.

(δ΄) Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $V$ και χαρακτηρίστε τα.

(ε΄) Έστω ειδικότερα $n=2$. Δώστε όλα τα σημεία $(x,y)$ του πεδίου ορισμού $\mathbb{R}^2$ της $V$, για τα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο (στο σημείο $(x,y,V(x,y))\in\mathbb{R}^3$ του γραφήματος) της $V$ έχει εξίσωση της μορφής $z=c$ με $c\in\mathbb{R}$ σταθερά.

**Θέμα 4. [1+1.5]**
Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ θετικά ορισμένος και $S=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}\|=1\}$.

(α΄) Δείξτε ότι η $S$ είναι συμπαγής και ότι η $f:S\to\mathbb{R}$ με $f(\bar{x})=\bar{x}^TA\bar{x}$ είναι συνεχής.

(β΄) Με χρήση του (α΄), δείξτε ότι υπάρχει $\alpha>0$ έτσι ώστε $\bar{x}^TA\bar{x}\geq\alpha\|\bar{x}\|^2$ για κάθε $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$.

**Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**