

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

14 Σεπτεμβρίου 2022

Θέμα 1. [3×1=3]

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 + y^3, & y \geq x^2, \\ 0, & y < x^2. \end{cases}$$

Βρείτε τα σημεία $(x_0, y_0) \in \Sigma := \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : y_0 = x_0^2\}$, στα οποία η f είναι

(α) συνεχής,

(β) διαφορίσιμη,

(γ) συνεχώς διαφορίσιμη, δηλαδή, βρείτε τα σημεία $(x_0, y_0) \in \Sigma$ για τα οποία υπάρχει $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε ο περιορισμός της f στον ανοικτό δίσκο $B((x_0, y_0), \varepsilon)$ να έχει συνεχή παράγωγο.

Θέμα 2. [2]

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\bar{x}) = \varphi(\|\bar{x}\|^2)$, όπου $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\varphi(r) = \begin{cases} e^{\frac{1}{r-1}}, & r < 1, \\ 0, & r \geq 1. \end{cases}$$

Δείξτε ότι $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ και δώστε την παράγωγο της f .

[Σχόλιο: Αποδεικνύεται και ότι $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, αλλά αυτό δεν ζητείται εδώ.]

Θέμα 3. [1+0.5=1.5]

Έστω ότι η πλαγιά ενός βουνού περιγράφεται τοπικά από το γράφημα Γ_f της $f(x, y) = y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Βρισκόμαστε στο σημείο $(0, 0, 0) \in \Gamma_f$ και θέλουμε να χαράξουμε έναν δρόμο $\bar{\gamma}(t) = (t, \alpha t, z(t)) \in \Gamma_f$, $t \geq 0$, $\alpha \geq 0$, πάνω στην πλαγιά, έτσι ώστε, έχοντας διανύσει την απόσταση 1 πάνω στον δρόμο, να έχουμε «ανέβει» (ως προς τον άξονα των z) το «υψόμετρο» $\beta \in [0, 1/\sqrt{2})$ από το επίπεδο $z = 0$.

(α) Βρείτε το α ως συνάρτηση του β .

(β) Αν το t είναι η παράμετρος του χρόνου, με ποια ταχύτητα κινούμαστε πάνω στο δρόμο $\bar{\gamma}(t)$ και πόσο χρόνο χρειαζόμαστε για να φτάσουμε στο σημείο του δρόμου με «υψόμετρο» β ;

Θέμα 4. [2×1+3×0.5 = 3.5]

Έστω η συνάρτηση $f: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \sin \ln(xy)$.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού της f στο $(x, y) = (1, 1)$.

(β) Υπολογίστε το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1/2)} \frac{x^2 + 4y^2 - 2x - 4y + 2}{x + 2y - \sin \ln(2xy) - 2}$.

(γ) Βρείτε όλα τα σημεία τοπικών και ολικών ακροτάτων της f .

(δ) Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $f|_E$, όπου $E := \{(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) : y = e/x\}$.

(ε) Δώστε το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα Γ_f της f για το σημείο $(x, y) = (1, e)$.

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!