Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Επίκ. Καθ. Γ. Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV
17 Φεβρουαρίου 2014

Θέμα 1. (α΄) Υπολογίστε το εμβαδό του κλειστού κυκλικού δίσκου

$$\overline{B}((0,0),r)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le r^2\},\ r>0,$$

(i) με εφαρμογή του Θεωρήματος Fubini,

(ii) με χρήση πολικών συντεταγμένων,

(iii) με εφαρμογή του Θεωρήματος Green.

(β΄) Υπολογίστε τον όγκο της κλειστής μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^3$

$$\overline{B}((0,0,0),1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

(i) με εφαρμογή του Θεωρήματος Fubini,

(ii) με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων.

(γ΄) Αν για $\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$, $B\subset\mathbb{R}^n$, $r>0$ ορίσουμε $\bar{x}_0+B:=\{\bar{x}_0+\bar{y} : \bar{y}\in B\}$, $rB:=\{r\bar{y} : \bar{y}\in B\}$, δείξτε ότι για την κλειστή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ κέντρου $\bar{x}_0$ και ακτίνας r ισχύει

$$\overline{B}(\bar{x}_0,r)=\bar{x}_0+r\overline{B}(\bar{0},1)$$

και υπολογίστε με χρήση του (β') και του Θεωρήματος Αλλαγής Μεταβλητής τον όγκο της μπάλας $\overline{B}((x_0,y_0,z_0),r)\subset\mathbb{R}^3$.

(δ΄) Υπολογίστε το εμβαδό της σφαίρας $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=r^2\}$, $r>0$, με χρήση του (γ') και του Θεωρήματος Gauss.

(ε΄) Δικαιολογήστε ότι ο όγκος μιας κλειστής μπάλας στον $\mathbb{R}^n$ ισούται με τον όγκο της αντίστοιχης ανοικτής.

(στ΄) Χωράνε 1000 βόλοι διαμέτρου 1 cm

(i) σε μια σφαιρική γυάλα διαμέτρου 10 cm;

(ii) σε ένα κυβικό κουτί ακμής 10 cm;

Θέμα 2. (α΄) Υπολογίστε τον όγκο του $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : |x|\le\frac{z}{2},\ |y|\le\frac{z}{2},\ z\in[0,1]\}$.

(β΄) Εξετάστε αν το διανυσματικό πεδίο $\bar{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\bar{f}(x,y,z)=\cos(xyz)(yz,xz,xy)$, είναι πεδίο κλίσεων και υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\bar{\gamma}}\bar{f}(x,y,z)\cdot d(x,y,z),\ \text{όπου } \bar{\gamma}(t)=\left(t\cos t, e^t\sin t, \log\left(1+\tfrac{1}{2}\sin t\right)\right),\ t\in[0,2\pi].$$

(γ΄) Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_\Phi\frac{1}{\sqrt{1+2z}}\,d\sigma,\ \text{όπου } \Phi(u,v)=\left(u,v,\frac{u^2+v^2}{2}\right),\ (u,v)\in\overline{B}((0,0),r),\ r>0.$$

(δ΄) Για Φ όπως στο (γ') και $\bar{\alpha}(t)=(r\cos t, r\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$, υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\Phi\circ\bar{\alpha}}(-y,x,x^2+y^2)\cdot d(x,y,z)$$

με χρήση (i) του ορισμού, (ii) του Θεωρήματος Stokes.

Θέμα 3. Δείξτε ότι η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx^2}$, $n\in\mathbb{N}$, συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, την οποία και να βρείτε, και ότι η ισότητα $f'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$ ισχύει *μόνο* για κάθε $x\neq 0$. Συγκλίνει η (f_n') ομοιόμορφα; Κατά σημείο;

Θέμα 4. Έστω $0<\delta<\pi$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-περιοδική με $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } |x|\le\delta,\\ 0, & \text{αν } \delta<|x|\le\pi.\end{cases}$

Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\delta)}{n}=\frac{\pi-\delta}{2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta}=\frac{\pi-\delta}{2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Λαμβάνονται υπόψη μόνο δικαιολογημένες απαντήσεις! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!