Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV

8 Φεβρουαρίου 2016

Θέμα 1. [2]

(α΄) Έστω σταθερά $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $x_1 > x_0$, $y_1 > y_0$. Δείξτε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα

$$L_h = \{(x_0, y_0) + \lambda(x_1 - x_0, 0) : \lambda \in [0,1]\}, \qquad L_v = \{(x_0, y_0) + \mu(0, y_1 - y_0) : \mu \in [0,1]\}$$

έχουν (διδιάστατο) μηδενικό περιεχόμενο.

(β΄) Χρησιμοποιώντας το (α΄), δείξτε ότι το $U = [0,1] \times [0,1]$ είναι Jordan-μετρήσιμο.

(γ΄) Δείξτε ότι το U του (β΄) είναι ένα κανονικό χωρίο ως προς τους άξονες $0x$ και $0y$.

Θέμα 2. [2] Υπολογίστε το περιεχόμενο των συνόλων

$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ 0 \le z \le Ax^2 + By^2\right\},$$
$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \le R^2\right\},$$

όπου $a, b, A, B > 0$ και $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $R > 0$, αντίστοιχα, σταθερά.

Θέμα 3. [2] Δίνονται η καμπύλη $\bar{\gamma}(t) = (t, \sin t)$, $t \in [0, T]$, όπου $T > 0$ σταθερό, και οι συναρτήσεις $\bar{f} : \mathbb{R} \times (-2, \infty) \to \mathbb{R}^2$ και $g : \mathbb{R} \times (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \to \mathbb{R}$ με

$$\bar{f}(x, y) = \left(\frac{1}{2+y}, -\frac{x}{(2+y)^2}\right) \qquad \text{και} \qquad g(x, y) = \sqrt{2 - y^2}.$$

Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{f} \cdot d(x, y) \qquad \text{και} \qquad \int_{\bar{\gamma}} g\, ds.$$

Θέμα 4. [2] Έστω $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le R^2,\ x^2 + y^2 \le z \le R^2\}$, όπου $R > 0$ σταθερό.

(α΄) Βρείτε δυο απλές παραμετρικοποιήσεις $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$ των επιφανειών $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$, που απαρτίζουν το σύνορο $S = S_1 \cup S_2 = \partial G$ του G, και υπολογίστε το εμβαδό του S.

(β΄) Υπολογίστε τον όγκο του G με χρήση του Θεωρήματος Gauss.

Θέμα 5. [2] Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, με $f_n(x) = \dfrac{n}{n^3 + x^2}$.
Δείξτε (α) ότι οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, αντίστοιχα, (β) ότι οι f, g είναι συνεχείς, (γ) ότι $f' = g$, και (δ) ότι

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan \frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad \text{και} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} x^4 g(x)\, dx = 0.$$

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! Ειδικότερα, να αναφέρετε με ακρίβεια τους ορισμούς και τα θεωρήματα που χρησιμοποιείτε!

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!