**Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Επίκ. Καθ. Γ. Γιαννούλης**

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV**

**17 Ιουνίου 2014**

**Θέμα 1.** Δείξτε ότι το
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq h^2\}$$
είναι ένα κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο xy και υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\int_B z(x^2 + y^2)\, d(x, y, z).$$

**Θέμα 2.** Έστω $K \subset \mathbb{R}^3$ το υποσύνολο που περικλείεται από τα επίπεδα $x = 0$, $x = a$ $(a > 0)$ και την επιφάνεια που σχηματίζεται κατά την περιστροφή της καμπύλης $\{(x, 0, b + cx^2) : x \in [0, a]\}$ $(b, c > 0)$ κατά $2\pi$ γύρω από τον άξονα των x. Υπολογίστε τον όγκο του K.

**Θέμα 3.** Υπολογίστε: $\displaystyle\int_{B_R} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, d(x, y, z)$, $B_R \subset \mathbb{R}^3$ η μπάλα κέντρου $\bar{0}$ και ακτίνας $R > 0$.

**Θέμα 4.** Υπολογίστε: $\displaystyle\int_{S_R} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, d\sigma$, $S_R \subset \mathbb{R}^3$ η σφαίρα κέντρου $\bar{0}$ και ακτίνας $R > 0$.

**Θέμα 5.** Έστω $a : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $a(0) = 1$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z = 1\}$ και
$$\bar{\gamma}(t) = \left(a(t)\cos t, a(t)\sin t, \frac{t}{2\pi}\right) \in B \quad \forall\ t \in [0, \pi].$$
Βρείτε το a και υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\int_{\bar{\gamma}} (z^2, 3y^2, 2z(x + \sqrt{2})) \cdot d(x, y, z).$$

**Θέμα 6.** Έστω C το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του $[0, 1] \times [0, 1]$. Υπολογίστε
$$\int_C (y^2 + x^3, 2x^4) \cdot d(x, y).$$
Είναι το $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (y^2 + x^3, 2x^4) \in \mathbb{R}^2$ πεδίο κλίσεων;

**Θέμα 7.** (α΄) Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε να ισχύει το Θεώρημα του Green, $\partial D$ το θετικά προσανατολισμένο σύνορό του και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ δυο φορές συνεχώς διαφορίσιμη με
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
Δείξτε ότι
$$\int_{\partial D} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) \cdot d(x, y) = 0.$$

(β΄) Έστω $U = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ και $\bar{n}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο $\partial U$. Υπολογίστε
$$\int_{\partial U} (x^2 y, z^8, -2xyz) \cdot \bar{n}(x, y, z)\, d\sigma.$$

**Θέμα 8.** Έστω $\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi)$, $(r, \varphi) \in K = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, και έστω $\partial K$ θετικά προσανατολισμένο. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\int_{\Phi(\partial K)} (z, x, y) \cdot d(x, y, z).$$

**Θέμα 9.** (α΄) Έστω $f_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ολοκληρώσιμες και $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ ομοιόμορφα. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθιών συναρτήσεων δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)\, dx.$$

(β΄) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \sin^2(\frac{\pi}{x})$, όταν $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, και $f_n(x) = 0$ αλλιώς. Δείξτε ότι η $f_n$ συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε μια συνεχή συνάρτηση.

**Θέμα 10.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-περιοδική και περιττή με $f(x) = x + \pi$, όταν $x \in (0, \pi)$. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f και δείξτε ότι η f αναπτύσσεται σε αυτήν.

**Κάθε θέμα αντιστοιχεί σε μία μονάδα. Μπορείτε να τα λύσετε με όποιο τρόπο θέλετε, αρκεί να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**