**Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Γιάννης Γιαννούλης**

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV**

**12 Ιουνίου 2015**

**Θέμα 1.** **[1]** Δικαιολογήστε γιατί το κανονικό χωρίο ως προς τον άξονα των $x$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \quad \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\},$$

όπου $\phi_1, \phi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\phi_1 \le \phi_2$, είναι Jordan-μετρήσιμο.

**Θέμα 2.** **[1]** Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ συνεχής και $B_R \subset \mathbb{R}^3$ η μπάλα κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $R > 0$. Εκφράστε το ολοκλήρωμα της $f$ πάνω από την $B_R$ με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων και δικαιολογήστε τη μορφή της νέας ολοκληρωτέας συνάρτησης και του πεδίου ορισμού της.

**Θέμα 3.** **[2]** Υπολογίστε

(α΄) το ολοκλήρωμα $\int_B (x^2+y^2+z^2)\, d(x,y,z)$ για

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 1, \ x \le 0, \ y \le 0, \ z \le 0\},$$

(β΄) τον όγκο του $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \in [-1,1], \ y^2+z^2 \le x^2\}$,

(γ΄) τον όγκο του τετραέδρου που περικλείεται από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ και $z = 2 - 2x - y$.

**Θέμα 4.** **[1]** Δίνεται η καμπύλη $\gamma(t) = (\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3)$, $t \in [0, \sqrt{3}]$, και η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 1 + 2x$. Υπολογίστε το μήκος της $C = \gamma([0,\sqrt{3}])$ καθώς και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C f(x,y)\, ds$.

**Θέμα 5.** **[1]** Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (3x^2y, x^3)$.

(α΄) Εξετάστε αν το $f$ είναι πεδίο κλίσεων και αν είναι δώστε μια αντιπαράγωγο (δυναμικό).

(β΄) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C f(x,y) \cdot d(x,y)$, όπου $C$ η καμπύλη που προκύπτει από την ένωση της (εικόνας της) $\gamma(t) = (t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, με τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα σημεία $(2\pi, 1)$, $(2\pi, 2)$, $(0, 2)$, $(0, 1)$, με αυτή τη σειρά.

**Θέμα 6.** **[3]** Δίνονται η επιφάνεια $S \subset \mathbb{R}^3$ και το διανυσματικό πεδίο $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \ge 1, \ x^2+y^2+z^2 = 4\}, \qquad F(x,y,z) = (x^2y, \frac{1}{2}z^2, yz).$$

(α΄) Υπολογίστε το εμβαδό της $S$.

(β΄) Επαληθεύστε το Θεώρημα του Stokes για τις $S$ και $F$.

(γ΄) Υπολογίστε με χρήση του Θεωρήματος του Gauss το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_{\partial V} F \cdot n\, d\sigma$, όπου $V$ το χωρίο που περικλείεται από την $S$ και το επίπεδο $z = 1$ και $n$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο $\partial V$.

**Θέμα 7.** **[1]** Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνεχή $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\int_0^{\pi/2} f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

**Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας!**
**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**