Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV

14 Ιουνίου 2016

Θέμα 1. [1]

(α΄) **[0.5]** Πότε λέμε ότι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ έχει μηδενικό περιεχόμενο;

(β΄) **[0.5]** Δείξτε ότι το $E = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\}$ έχει μηδενικό περιεχόμενο.

Θέμα 2. [2] Δίνεται ο κλειστός κυκλικός δίσκος $D \subset \mathbb{R}^2$ με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $R > 0$.

(α΄) **[0.5]** Δείξτε ότι το D είναι κανονικό χωρίο ως προς τους άξονες $0x$ και $0y$.

(β΄) **[1]** Δείξτε ότι το D είναι συμπαγές και αιτιολογήστε γιατί το ∂D έχει μηδενικό περιεχόμενο.

(γ΄) **[0.5]** Υπολογίστε το εμβαδόν του D με χρήση του Θεωρήματος του Green.

Θέμα 3. [2] Έστω $V \subset \mathbb{R}^3$ το χωρίο που περικλείεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ και τα ελλειπτικά παραβολοειδή $z = x^2 + y^2$ και $z = -(x^2 + y^2)$.

(α΄) **[0.5]** Αιτιολογήστε γιατί το V είναι κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο $0xy$.

(β΄) **[0.5]** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_V z^2 \, d(x,y,z)$.

(γ΄) **[1]** Υπολογίστε τον όγκο του V με χρήση της Αρχής του Cavalieri.

Θέμα 4. [1] Έστω C το γράφημα της $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I = \int_C y\sqrt{1-y^2}\,ds \qquad \text{και} \qquad J = \int_C (1, \sqrt{1-y^2}) \cdot d(x,y),$$

όπου για το J θεωρούμε την C ως απλή καμπύλη με αρχικό σημείο $(\pi/2, 1)$ και τελικό $(0,0)$.

Θέμα 5. [1.5] Έστω $\bar{f}(x,y,z) = -\dfrac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, και η καμπύλη

$$\bar{\gamma}(t) = r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \cos t\right), \qquad t \in [0,\pi], \qquad r > 0.$$

(α΄) **[0.5]** Εξετάστε αν το $\bar{f}$ είναι πεδίο κλίσεων και, αν είναι, βρείτε ένα δυναμικό του.

(β΄) **[0.5]** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{\bar{\gamma}} \bar{f}(x,y,z) \cdot d(x,y,z)$.

(γ΄) **[0.5]** Περιγράψτε την καμπύλη $\bar{\gamma}$ γεωμετρικά ως εξής: «Η $\bar{\gamma}$ παραμετρικοποιεί το τμήμα της καμπύλης στον $\mathbb{R}^3$, η οποία προκύπτει από την τομή του επιπέδου __________ με __________, και έχει (η $\bar{\gamma}$ και το τμήμα αυτό) αρχικό σημείο το _______ και τελικό σημείο το _______.»

Θέμα 6. [2.5] Έστω η $\bar{f}(x,y,z) = (x^3, y^3, 1)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, και οι δύο επιφάνειες

$$S_1 = \{(x, y, 2x^2 + 2y^2) : (x,y) \in D\} \qquad \text{και} \qquad S_2 = \{(x, y, 1 + x^2 + y^2) : (x,y) \in D\}$$

με το D του Θέματος 2 για $R = 1$.

(α΄) **[0.5]** Υπολογίστε το εμβαδόν της S_2.

(β΄) **[1.5]** Επαληθεύστε το Θεώρημα του Gauss για την $\bar{f}$ στο $V \subset \mathbb{R}^3$ που περικλείεται από τις S_1 και S_2. *[Σκεφθείτε πώς μπορείτε να ελαχιστοποιήσετε τους υπολογισμούς σας!]*

(γ΄) **[0.5]** Επαληθεύστε το Θεώρημα του Stokes για την $\bar{f}$ στην S_2.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!